Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 44 12/03/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

COMPITINO CONFERMATO PER IL 22/3 ore 15
AULA B21

SOL. DI EQ. DIFF. TRAMITE LE SERIE DI POTENZE

PROBLEMA: Date quattro funzioni $a, b, c, f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ voglio studiare le soluzioni dell'eq. diff. del II° ordine

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = f(x)$$

SE avessi $a(x) = 1$ (oppure $a(x) \neq 0$ e allora divido tutto per $a(x)$ e mi riconduco al caso $a = 1$) $\Rightarrow$ È NOTO che preso $x_0 \in]\alpha, \beta[$, fissati y_0 e $y_1 \in \mathbb{R}$ esiste UNICA una sol dell'eq. diff. tale che $y(x_0) = y_0$ $y'(x_0) = y_1$
QUANDO $a(x) = 1$ dico che l'equazione è in "FORMA NORMALE" ($y'' = F(y, y', x)$ con F . . .)

VOGLIO AMMETTERE $a(x) = 0$ in qualche x e cercare soluzioni

<u>TEOREMA</u> Se a, b, c e f sono analitiche $\Rightarrow$ le eventuali soluzioni y sono analitiche

Allora l'idea è di cercare la soluzione $y(x)$ della forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \text{con } a_n \text{ da trovare}$$

Vedremo degli esempi (in cui a, b, c sono dei polinomi)

<u>ESEMPIO</u>

$$x y'' - y' - y = 0$$

(NON È IN FORMA NORMALE SU $\mathbb{R}$ $a(x)=0$ se $x=0$)

Cercherò $y(x)$ della forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($x_0=0$ perché 0 è il punto in cui $a(x)=0$)

Se $y(x)$ è fatta così (e se la serie ha raggio di conv. $R>0$)

allora $\displaystyle y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ $\qquad$ $\displaystyle y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$

Se metto queste espressioni nell'equazione trovo

$$x y'' - y' - y = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

(voglio avere x^n in tutte le sommatorie $\rightarrow$ faccio un cambio di indice nelle prime due $n-1=m \Leftrightarrow n=m+1$ e poi chiamo "$m=n$")

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (n+1) n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

(le somme partono da indici diversi. PERÒ nella prima serie posso aggiungere $n=0$ dato che $a_{n+1}(n+1)n = 0$ se $n=0$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1}(n+1)n - a_{n+1}(n+1) - a_n \right) x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1} (n+1)(n-1) - a_n \right) x^n$$

Perché questa roba faccia zero basta (e in realtà è necessario) che tutti i coeff. di x^n siano nulli cioè che

(R) $\boxed{a_{n+1}\,(n^2-1) = a_n \quad \forall n}$ (relazione ricorsiva tra i coefficienti)

Sarei tentato di scrivere $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n^2+1)}$ $\boxed{\text{NON SI PUÒ FARE se } n=1}$

Devo trattare a parte il caso $n=1$. Se metto $n=1$ in (R) trovo $a_2 \cdot 0 = a_1$ dunque $\boxed{a_1 = 0}$

Ma allora se $n=0$ viene $0 = a_1(-1) = a_0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$

Se $n \geq 2$ posso effettivamente scrivere

(R') $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n^2-1} \quad \forall n \geq 2$

Questa (R') "genera" tutti gli a_n, una volta assegnato $\boxed{a_2 \in \mathbb{R}}$

$n=2 \quad a_3 = \dfrac{a_2}{3}$, $n=3 \quad a_4 = \dfrac{a_3}{8} = \dfrac{a_2}{24}$, $n=4 \quad a_5 = \dfrac{a_4}{15} = \dfrac{a_2}{24 \cdot 15}$

RIASSUMENDO, se $y = \sum_0^\infty a_n x^n$ è soluzione $\Rightarrow$

$a_0 = a_1 = 0$, a_2 è arbitrario, a_n sono univocamente determinati da a_2 $\forall n \geq 3$. ANZI

$a_0 = a_1 = 0$, se $\hat{a}_n$ sono gli a_n relativi a $a_2 = 1$

$\hat{a}_2 = 1$, $\hat{a}_3 = \frac{1}{3}$, $\hat{a}_4 = \frac{1}{24}$, $\hat{a}_5 = \frac{1}{24 \cdot 15}$ ..., allora

per a_2 generico ho $a_n = \hat{a}_n\, a_2$

IL DATO INIZIALE È $a_2 = \dfrac{y''(0)}{2}$ MENTRE $y(0) = y'(0) = 0$ (sono rispettivamente a_0 e a_1)

• IN QUESTA EQUAZIONE LA SOLUZIONE È "OBBLIGATA" AD ASSUMERE VALORE ZERO E DERIVATA ZERO NELL'ORIGINE

• POSSO ASSEGNARE COME VOGLIO $y''(0)$ E SE LO FACCIO $y(x)$ È UNIVOCAMENTE DETERMINATA
UN SOLO "GRADO DI LIBERTÀ"

ATTENZIONE DEVO CONTROLLARE CHE CON GLI a_n trovati mediante R la serie abbia raggio di conv. $R>0$.

RIGUARDIAMO LA (R') $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n^2-1}$

osservo che, se $a_2 > 0 \Rightarrow a_n > 0$ per $n \geq 2$ (per induzione)

MI SERVE $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ POSSO IL CRITERIO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to L$$

In fatti: $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{n^2-1} \longrightarrow 0 \Rightarrow \boxed{R = +\infty}$

Dunque $y(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed essendo una serie di potenze posso derivare per serie, dunque tutti i passaggi che ho fatto sono leciti $\Rightarrow y(x)$ è soluzione.

ESEMPIO (controesempio)

$$x^3 y'' - y = 0$$

se faccio come sopra cerco $y(x) = \sum a_n x^n$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$x^3 y'' - y = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Devo usare $m = n+1$, $n = m-1$ nella prima serie $\rightarrow$

$$\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-1}(m-1)(m-2)x^m - \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$ ← LA DIVIDO IN $\sum_{0}^{2} a_m x^m + \sum_{3}^{\infty} a_m x^m$

↑ non posso mettere $m=0$ (potrei partire da 1 ...) (m lo chiamo n)

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(a_{n-1}(n-1)(n-2) - a_n\right)x^n - \sum_{m=0}^{2} a_n x^n$$ ← DEVE FARE ZERO

$\Longleftrightarrow \quad a_0 = a_1 = a_2 = 0$ e poi devo avere

$$a_n = a_{n-1}(n-1)(n-2) \qquad \forall n \geq 3$$
$$a_{n+1} = a_n\, n(n-1) \qquad \forall n \geq 2$$

DEVO VEDERE IL RAGGIO DI CONVERGENZA!

FACCIO COME PRIMA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} (n-1)(n-2) = +\infty \Rightarrow \boxed{R=0}$$

L'UNICA SOLUZIONE DELL'EQ. È $y(x) = 0$

$$x^2 y'' - y = 0$$

$$y(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{2}^{\infty} a_n n x^{n-2}$$

$$x^2 y'' - y = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \underbrace{n(n-1)}_{\text{vale zero se } n=0/n=1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$

↑ posso mettere $n=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(n(n-1) - 1\right) x^n$$

TROVO $a_n(n^2 - n - 1) = 0 \quad \forall n$

$\Longleftrightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n$ (perché $n^2 - n - 1 = 0$ quando $n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ che non è intero)

SOLO $y(x) = 0$

MODIFICHIAMO L'ESERCIZIO IN

$$x^2 y'' - A y = 0 \qquad A > 0$$

CON GLI STESSI CALCOLI ARRIVO A

$$(*) \qquad a_n (n^2 - n - A) = 0$$

se non ci sono radici intere viene $a_n = 0 \ \forall n \Rightarrow y(x) = 0$

Cerco le radici di $n^2 - n - A = 0 \qquad n = \frac{1 \pm \sqrt{1+4A}}{2}$

Per esempio se $\boxed{A = 2}$ viene $n = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Allora $(*)$ mi dice che $a_n = 0 \ \forall n \neq 2$ a_2 è arbitrario. DUNQUE LE SOL. DI

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

sono tutte e sole $y(x) = a x^2 \qquad a \in \mathbb{R}$

Per curiosità faccio la verifica. Se $y(x) = a x^2$

$y'(x) = 2ax \qquad y''(x) = 2a \qquad x^2 y'' - 2y = 2ax^2 - 2ax^2 = 0$

TORNA

ESEMPIO (non serve questo metodo, ma lo faccio per vedere come le cose "tornano")

$$y'' = y \qquad \left(\text{so che } y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}\right)$$

Se cerco $y(x) = \sum a_n x^n$ trovo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{a_n n (n-1) x^{n-2}}_{} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$m = n-2 \quad n = m+2$ (e poi lo chiamo di nuovo n)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+2} (n+2)(n+1) - a_n\right) x^n$$

$$(R) \qquad a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \qquad \forall n \geq 0$$

(qui il denominatore NON SI ANNULLA)

(R) è ricorsiva di ordine 2. Gli a_n sono determinati se fisso a_0 $(= y(0))$ e a_1 $(= y'(1))$

~~Mettiamoci nel caso in cui $a_0 = 1$ $a_1 = 0$~~

Nota che in R non c'è a_{n+1} ⇒ i pari dipendono dai pari e i dispari dai dispari: a_0 determina a_{2n} $\forall n$, a_1 determina a_{2n+1} ← per seguire questa idea

conviene porre $b_n = a_{2n}$ $c_n = a_{2n+1}$

Troveremo una relazione ricorsiva per b_n e una per c_n.

$$b_{n+1} = a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \frac{a_{2n}}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{b_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$(R_1) \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$c_{n+1} = a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = a_{2n+1+2} = \frac{a_{2n+1}}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{c_n}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$(R_2) \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{(2n+2)(2n+3)}$$

Mettiamo che $a_0 = 1$ $a_1 = 0$ $\Longleftrightarrow$ $b_0 = 1$ $c_0 = 0$

Da R_2 $\Rightarrow$ $c_n = 0$ $\forall n$ (ci sono solo a_n con n pari)

Invece $b_0 = 1$ $\quad b_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$ $\quad b_2 = \frac{1}{1\cdot 2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4}$

$b_3 = \frac{1}{1\cdot 2} \cdot \frac{1}{3\cdot 4} \cdot \frac{1}{5\cdot 6}$ - - - $\quad b_n = \frac{1}{(2n)!}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Se uso la formula risolutiva $y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}$

con le condizioni $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$ trovo

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \qquad y'(x) = \alpha e^{x} - \beta e^{-x}$$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ cioè $y(x) = e^{x} + e^{-x}$

SI VEDE ALLORA CHE CON QUESTO METODO RITROVO LE FORMULE NOTE

RIPRENDIAMO IL PRIMO ESEMPIO E METTIAMOCI UN TERMINE NOTO

$$x y'' - y' - y = x$$

Come fatto prima, cerco y. della forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Rifaccio gli stessi calcoli

$$x y'' - y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1} (n+1)(n-1) - a_n \right) x^n$$

DEVO IMPORRE CHE LA SERIE SCRITTA SOPRA FACCIA X (prima faceva zero). QUESTA CONDIZIONE DIVENTA

$$a_{n+1} (n^2-1) - a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

DUNQUE, se prendo $n = 1$ ho $a_2 \cdot 0 - a_1 = 1$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{a_1 = -1}$. Prendo $n=0$, trovo $a_1 (-1) - a_0 = 0$

cioè $\boxed{1 = a_0}$. Se $n \geq 2$ ritrovo

$$(R') \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2-1} \quad \forall n \geq 2$$

che determino tutti gli a_n $n \geq 3$ AVENDO FISSATO a_2

DUNQUE

$$y(x) = 1 - x + a_2 \sum_{n=2}^{\infty} \hat{a}_n x^n$$

dove gli $\hat{a}_n$ sono quelli detti all'inizio $\left(\hat{a}_2 = 1 \quad \hat{a}_{n+1} = \frac{\hat{a}_n}{n^2-1} \right)$

$$y(x) = \underbrace{1 - x}_{\substack{\text{soluzione} \\ \text{per } a_2 = 0}} + \underbrace{a_2 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n x^n}_{\substack{\text{sol. dell'omogenea} \\ \text{(trovata prima)}}}$$

CIOÈ se prendo $y''(x) = 0$ dovrei avere la sol. $y(x) = 1 - x$

In effetti se $y(x) = 1 - x \Rightarrow y'(x) = -1 \quad y''(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x y'' - y' - y = 0 + 1 - (1 - x) = x \quad$ TORNA