Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 43 11/03/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_n) \text{ succ. data (in } \mathbb{R})$$

f è definita nell'intervallo $]-R, R[$ dove R è il raggio di convergenza: $R := 1/L$ $\quad L := \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

f è $C^\infty(]-R,R[)$ e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{\substack{n=k \\ (n=0)}}^{\infty} a_n \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{=0 \text{ se } n \leq k-1} x^{n-k}$$

In particolare $f^{(k)}(0) = k!\, a_k \iff a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

ESEMPI

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad (a_0 = 0)$$

RAGGIO DI CONV. $R = 1/L$ con $L = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \implies R = 1$. DUNQUE $\boxed{f :]-1,1[\to \mathbb{R}}$

Sappiamo che f è C^∞ e che – in particolare.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots$$

(cambio di indice $m = n-1$) $= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left(= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \frac{1}{1-x}$

serie geometrica

DUNQUE $f'(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{dt}{1-t} =$

$$f(0) + \Big[-\ln(1-t) \Big]_0^x = f(0) - \ln(1-x)$$

$$f(x) = f(0) - \ln(1-x)$$

$f(0)$ lo vedo dalla def: $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$ non c'è $n=0$

IN DEFINITIVA $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$ $-1 < x < 1$

OSS. Si vede che la serie (NON È DEFINITA IN $x=1$, MA) È DEFINITA IN $x=-1$, dato che per $x=-1$ viene $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge per Leibniz

¿POSSO DIRE? che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ★ $(x=-1)$

Per quanto ne so (finora) la risposta è NO - NON SO se la f è continua su $[-1,1[$. PER VEDERE SE ★ è vero mi serve la conv. uniforme su $[-1,0]$ e NON LA POSSO RICAVARE DALLA CONV. TOTALE (CHE NON C'È)

- CONV. TOTALE su $[-1,0]$ corrisponde a $\sum_1^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[-1,0]}$

dove $f_n(x) = \frac{x^n}{n} \Rightarrow \|f_n\|_{\infty,[-1,0]} = \max_{-1\le x\le 0} \frac{|x|^n}{n} = \frac{1}{n}$

e $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ NO CONV. TOTALE

· Cerco la conv. unif. per altra via.. DEVO ESAMINARE

$$\| S_n - f \|_{\infty,[-1,0]} = \max_{-1\le x\le 0} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \right| =$$

$$\max_{-1\le x\le 0} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k |x|^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k |x|^k}{k} \right|$$ (serie a segni alterni)

$b_n \ge 0$ b_n decrescente

Le serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ hanno delle proprietà:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_k$$

S_{2n} è decrescente
S_{2n+1} è crescente

$$\underbrace{S_{2k-1} \le S \le S_{2k}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|S - S_n| \le |b_n|} \Longleftarrow \begin{array}{l} |S - S_{2k}| \le |S_{2k} - S_{2k-1}| = |b_{2k}| \\ |S - S_{2k-1}| \le |S_{2k} - S_{2k-1}| = |b_{2k}| \le |b_{2k-1}| \end{array}$$

DUNQUE

$$\Big| \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k |x|^k}{k}}_{S_n} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k |x|^k}{k}}_{S\ (=f)} \Big| \le \frac{|x|^n}{n} \le \frac{1}{n} \quad \forall x \in [-1,0]$$

DUNQUE $\| S_n - f \|_{\infty,[-1,0]} \le \frac{1}{n} \to 0$ da cui la serie converge uniformemente su $[-1,0]$

(ho trovato un esempio di serie unif. conv. MA NON tot. conv.)

$\Rightarrow$ vale la formula a pag $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ #

Altro esempio $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = f(x)$

Anche in questo caso $R = 1$ perché $\sqrt[n]{n} \to 1$. $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$

(in ± 1 non converge perché $n \to +\infty$, e $(-1)^n n$ $\not\to$)

Se derivo trovo $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$??

INVECE FACCIAMO LA PRIMITIVA.

Parto da $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Derivo $g(x)$:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{Allora}$$

$$x\, g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \boxed{\frac{x}{(1-x)^2} = f(x)}$$

Per esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2$ $\#$

ALTRO ESEMPIO (collegato agli sviluppi di Taylor)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x) \qquad \text{. Vedo che } \boxed{R = +\infty}$$

Infatti $\sqrt[n]{1/n!} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ Posso usare "CESARO"

$b_n > 0$ se $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to \ell \Rightarrow \sqrt[n]{b_n} \to \ell$. Nel caso sopra

posso a considerare $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to +\infty$

dunque $\sqrt[n]{n!} \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to L = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = +\infty$

DUNQUE $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$.

$f(0) = 1$

Facciamo la derivata di f:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \underset{m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = f(x)$$

(potrei dedurre $f(x) = e^x$ dato che f risolve l'eq. diff $y' = y \quad y(0)=1$)

FACCIAMO VEDERE CHE $f(x)\cdot f(y) = f(x+y)$

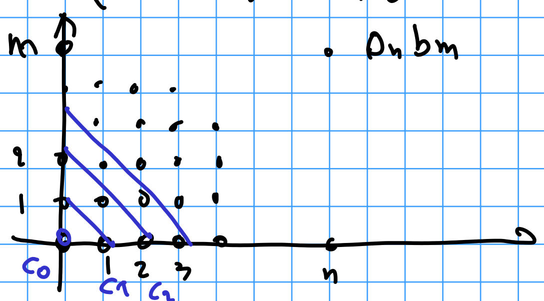
Mi serve la formula sul "Prodotto alla Cauchy" tra due serie

Se (a_n) e (b_n) sono due successioni in $\mathbb{R}$, definisco

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$$

Allora se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono assolutamente convergenti ($\sum |a_n| < +\infty$, $\sum |b_n| < +\infty$)

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$



IDEA: $\left(\sum_n a_n\right)\left(\sum_m b_m\right) =$ "$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_n\, b_m$" $= \sum_n c_n$

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3$$
$$+\, a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3$$
$$+\, a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3$$

TORNIAMO A f:

$$f(x)\cdot f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \quad \text{(Prodotto alla Cauchy)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = f(x+y)$$

HO TROVATO LA "PROPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE"
<u>usando le proprietà delle serie</u>

Potrei <u>DEFINIRE</u> e^x come $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

<u>ANZI</u> posso definire $e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$ (con gli stessi calcoli)

in modo che e^z è definito in $\mathbb{C}$

Se faccio così trovo

$$e^{(a+ib)} = e^a e^{ib}.$$ Rimane da capire chi è e^{ib}

$$e^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ib)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ib)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(x)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(x)}$$

$$\left(\begin{array}{l} i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k \\ i^{2k+1} = i\, i^{2k} = (-1)^k i \end{array} \right)$$

(ammesso che io dimostri
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} = \cos(x)$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x)\text{)}$$

$$\Rightarrow e^{ib} = \cos(b) + i \sin(b)$$

$$\left(\begin{array}{l} \cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{array} \right)$$

L'altro punto di vista è quello in cui e^x $\cos(x)$ $\sin(x)$ sono noti e si dimostra che $\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$

Si parte dal polinomio di Taylor

è ben noto che

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x \implies \left.\frac{d^n}{dx^n} e^x\right|_{x=0} = 1 \quad \forall n$$

Dunque il polinomio di Taylor di grado n è

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \frac{x^n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Cosa so su P_n ??

(1) (Peano) $\quad e^x = P_n(x) + o(x^n) \longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - P_n(x)}{x^n} = 0$

(ci dice come $P_n(x)$ approssima e^x per $x \sim 0$)

NON CI SERVE QUI !!

(2) (Lagrange)

derivata $n+1$ di e^x in $x=\xi$

Dati x e n $\quad e^x - P_n(x) = \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}$ $\quad$ per un opportuno $\xi = \xi_{n,x}$ compreso tra zero e x

QUESTA CI SERVE !!

FISSO x (e faccio tendere $n \to \infty$)

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \right| \le e^{|x|} \boxed{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} \xrightarrow{\text{se } n\to\infty} 0$$

$x>0 \quad 0<\xi<x$

$x<0 \quad -|x|<\xi<0$

$|\xi| < |x|$

$e^\xi < e^{|\xi|} < e^{|x|}$

il fattoriale VINCE SULL'ESPONENZIALE

DUNQUE $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} = e^x$ CIOÈ

$\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge e ha come somma e^x

Quindi ho dimostrato la formula (usando Taylor con resto di Lagrange)

NELLO STESSO MODO POSSO DIMOSTRARE CHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$$

Dunque per queste funzioni $\left(e^x, \sin(x), \cos(x)\right)$ posso dire che sono "SOMMA DELLA LORO SERIE DI TAYLOR"

Quest'ultima proprietà NON VALE SEMPRE:

<u>CONTROESEMPIO</u>

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-x^{-2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- È chiaro che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ $\left(e^{-\infty} = 0 \ldots\right)$
  (f è continua anche in $x = 0$)

- Facciamo la derivata in $x \neq 0$

$$x \neq 0, \quad f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-2x^{-3}\right) = -2\frac{e^{-1/x^2}}{x^3} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

(VINCE L'ESPONENZIALE)

DUNQUE f è derivabile in $x = 0$ e $f'(0) = 0$

- IN GENERALE DICO CHE f è C^∞ e

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad \forall k$$

IDEA DI DIM si dimostra che (per induzione)

$$x \neq 0 \quad f^{(k)}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} P_k(x)}{x^{m_k}}$$ per opportuni P_k polinomi e m_k intero

IN OGNI CASO $f^{(k)}(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$ (VINCE SEMPRE $e^{-\frac{1}{x^2}}$)

HO TROVATO che f è $C^\infty(\mathbb{R})$ e ho tutte derivate nulle in $x=0$ $\quad (f(x) = o(x^n) \quad \forall n$ intero$)$

MA ALLORA LA SUA SERIE DI TAYLOR È NULLA

MA ALLORA $f(x) \neq$ sua serie di Taylor se $x \neq 0$

DEF. Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subset \mathbb{R}$ aperto$)$

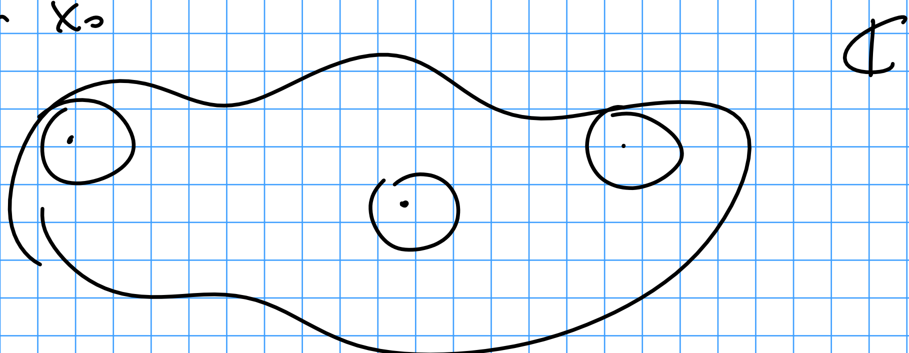
(o anche $f: \Omega \to \mathbb{C}$ $\quad \Omega \subset \mathbb{C}$ aperto)

Dico che f è ANALITICA se f è C^∞ e

$\forall x_0 \in \Omega \quad \exists r > 0$ tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad \text{per } |x-x_0| < r$$

Per ogni punto x_0, vicino a x_0 f è una serie di potenze centrata in x_0



e^x $\sin x$ $\cos x$ sono analitiche (posso rifare il ragionamento visto in $x_0=0$ in qualunque punto)

la funzione del controesempio NON È ANALITICA in $\mathbb{R}$ (lo è in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ...)