Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 41 05/03/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

SOTTINTESO $x^0 = 1$ $\forall x$

$f(0) = a_0$

Serie di potenze $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ ($\simeq$ polinomio di grado ∞)

Def. È data una successione (a_n) (i coefficienti)
$a_n \in \mathbb{R}$ / $a_n \in \mathbb{C}$ (sarebbe più interessante vedere il caso complesso)
Data (a_n) è definita la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)$ #

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

- Si pone il problema di capire per quali x la serie converge. In altri termini dove c'è CONVERGENZA PUNTUALE – cioè per quali x è ben definita $f(x)$. Inoltre ci si può chiedere se f è continua / derivabile ...

DEF. (RAGGIO DI CONVERGENZA) Data (a_n)
considero

$$L = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(se esiste il limite $\max\lim = \lim$)
$\max\lim$ ESISTE SEMPRE

L esiste ed è tra 0 e $+\infty$ compresi.

PONGO $R := \frac{1}{L}$ (0 se $L = +\infty$, $+\infty$ se $L = 0$)

Dico che R ($\in [0,+\infty]$) è il "raggio di convergenza" della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

NOTA La def. va bene anche se $a_n \in \mathbb{C}$ $\left(|a_n| = \sqrt{(\operatorname{Re} a_n)^2 + (\operatorname{Im} a_n)^2} \right)$

<u>Teorema</u> (del raggio di convergenza) Sia (a_n) succ. in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) e sia R come definito sopra. ALLORA

(a) La serie converge puntualmente su $]-R,R[$ (sul Disco aperto $B(0,R)$ nel caso complesso)

(b) Se $0 < R' < R$ allora la serie converge uniformemente su $[-R', R']$ (su $\overline{B(0,R')}$ nel caso complesso)

(c) Se $|x| > R$ la serie NON CONVERGE (dunque non converge fuori da $[-R,R]$ (da $\overline{B(0,R)}$))

NON RIESCO A DIRE NULLA NEI PUNTI con $|x| = R$ ($\pm R$ nel caso reale, $S(0,R)$ nel caso complesso).
DIPENDE DAI CASI

<u>COME CONSEGUENZA</u> ho che $f:]-R,R[\to \mathbb{R}$ ($f: B(0,R) \to \mathbb{C}$) ed è CONTINUA (per la conv. unif. - dato che i termini $a_n x^n$ sono continui in x)
<u>SE $R > 0$</u>

<u>Dim</u> OSSERVO che (b) $\Rightarrow$ (a). QUINDI DIMOSTRO (b)
Per questo prendo $0 < R' < R$ e dimostro che c'è CONV. TOTALE su $[-R', R']$ ($\overline{B(0,R')}$). Per farlo mi calcolo $\|f_n\|_\infty$ dove $f_n(x) = a_n x^n$ (su $[-R', R']$)

Dunque $\|f_n\|_\infty = \max_{|x| \le R'} |a_n x^n| = |a_n| \max_{|x| \le R'} |x|^n = |a_n| (R')^n$

Devo vedere se $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (R')^n < +\infty$.

Quest'ultima è una serie di numeri positivi !! Applico il CRITERIO DELLA RADICE (n-esima).

COND. SUFFICIENTE per la convergenza è che

$$\max\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|(R')^n} < 1 \qquad \left(\sum_n \alpha_n < +\infty \;\Leftarrow\; \sqrt[n]{\alpha_n}\to \ell<1,\quad \alpha_n\geq 0\right)$$

$$= R' \max\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{R'}{R} < 1$$

TORNA.

HO DIM. LA CONV. UNIF. su $\{|x|\leq R'\}$ $\forall R'<R$

Prendo $|x|>R$

(c) ✓ Noto che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergesse $\Rightarrow |a_n x^n| \to 0$

MA $\sqrt[n]{|a_n||x|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| \longrightarrow \frac{|x|}{R} > 1$

Ma è noto che, se $\sqrt[n]{|\alpha_n|}\to \ell>1 \Rightarrow |\alpha_n|\to\infty$

NON PUÒ TENDERE A ZERO

ESEMPIO "PRINCIPE" LA SERIE GEOMETRICA

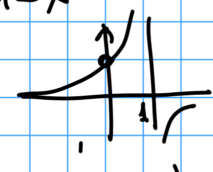
che corrisponde a $a_n = 1$ $\forall n$. Cioè

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

In realtà sappiamo che $\sum_{n=0}^{K} x^n = \frac{1-x^{K+1}}{1-x}$ se $x\neq 1$ da cui

si ricava che:

- se $|x|<1$ la serie converge e ha come somma $\frac{1}{1-x}$
- Se $x\geq 1$ la serie diverge a $+\infty$



- Se $x\leq -1$ la serie è indeterminata (dunque non converge)

(se mi metto in $\mathbb{C}$ vedo che la serie non converge per nessun numero z di modulo 1) $S_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}$ $(z\neq 1)$

QUESTI FATTI VANNO D'ACCORDO COL TEOREMA SOPRA

Infatti $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{1} \to 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$

Se lo vedo come serie di potenze $\sum a_n z^n$ devo definire a_n nel seguente modo:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k+1 \quad (n \text{ dispari}) \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k \end{cases}$$

$a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = -1 \quad a_3 = 0 \quad a_4 = 1 \dots$

Se voglio il raggio di convergenza devo calcolare

$L = \max\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ NOTA CHE $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ PARI} \end{cases}$

E' chiaro che $L = 1$ (c'è la sottosuccessione dei pari su cui il limite fa 1, Non posso trovare altre sottosucc. su cui il limite sia > 1)

$\Rightarrow$ IL RAGGIO $\boxed{R = 1}$

Dunque $f(z)$ è definita su $B(0,1)$ e non può essere definita fuori da $B(0,1)$.

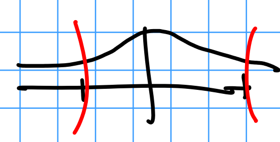
Notiamo però che posso scrivere $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n$

cioè $f(z) = g(-z^2)$ dove $g(z) = \sum z^n$ (serie geometrica)

Dunque $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

Se guardo solo gli z reali vedo che $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

che non ha nessuna singolarità in $\mathbb{R}$



Se la guardo in $\mathbb{R}$ non capisco come mai la serie converge solo tra -1 e 1 MA se guardo in $\mathbb{C}$ vedo che $\frac{1}{1+z^2}$ ha due singolarità in $\pm i$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\quad a_n = \frac{1}{n} \quad (a_0 = 0)$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1 \qquad (\sqrt[n]{n} \to 1)$$

$$e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \to e^0 = 1 \qquad \left(\frac{1}{n}\ln(n) \to 0\right)$$

DUNQUE $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge su $]-1,1[$

non converge fuori da $[-1,1]$. NON È CHIARA L'ESPRESSIONE DI $f(x)$. IN QUESTO ESEMPIO VEDO CHE

se $x = 1$ viene $\sum^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

se $x = -1$ viene $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge per Leibniz

DUNQUE f è definita su $[-1,1[$

Non so dire se f è continua in -1 (almeno per quanto so finora)

- $\sum \frac{x^n}{n^2}$ ha ancora raggio di convergenza 1

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \longrightarrow 1^2 = 1 \right)$$

Questa converge anche agli estremi perché se $x = \pm 1$ ho $\sum \frac{(\pm 1)^n}{n^2}$ che converge (assolutamente)

DERIVABILITÀ ??

__Teorema__ Supponiamo che $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ abbia raggio di convergenza $R > 0$. Allora

(1) la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ è ancora

una serie di potenze con lo stesso raggio.

(2) f è derivabile su $]-R,R[$ e la sua derivata è $\left[f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \right]_{\infty}$

Dim. (1) osservo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} (n+1) x^n$

Dunque la serie delle derivate ha come coefficienti

$$b_m = a_{m+1} (n+1)$$

Da cui il raggio si ottiene facendo il (max) lim. di

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \sqrt[n]{n+1}$$

$$\sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \left(\sqrt[n+1]{|a_{m+1}|} \right)^{\frac{n}{n+1}} \qquad \frac{n}{n+1} \to 1 \qquad \sqrt[n]{n+1} \to 1$$

$$\sqrt[n+1]{|a_{m+1}|} \to \frac{1}{R}$$

Dunque $\sqrt[n]{b_n} \to \frac{1}{R}$ per cui il raggio è sempre R

(2) Uso il teorema di derivazione per serie. Infatti da (1) so che la serie delle derivate converge unif. su ogni $B(0,R')$ con $R' < R$ e so che la serie di potenze conv. unif. sullo stesso $B(0,R')$

$\Rightarrow$ f è derivabile e $f' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Se lo faccio $\forall R' < R$ ottengo il risultato su $]-R,R[$

OSS. ITERANDO IL RAGIONAMENTO TROVO che f è di classe $C^{\infty}(]-R,R[)$

e $$f^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^{\infty} a_m \underbrace{m(m-1)\cdots(m-k+1)}_{k \text{ fattori}} x^{n-k} \qquad x \in]-R,R[$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)\, x^{n-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n\, n(n-1)(n-2)\, x^{n-3}$$

$$\vdots$$

OSS. Se calcolo $f^{(k)}(0)$ cosa trovo ??

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, 0^{n-k} = a_k\, k(k-1)\cdots 1$$

fa zero se $n > k$
fa uno se $n = k$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(k)}(0) = a_k\, k!} \iff \left(a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right)$$

Dunque, i coeff. a_n (da cui sono partito) sono i coeff. di Taylor della funzione f (costruita a partire da (a_n)).
Dunque la f così costruita è "somma della sua serie di Taylor"

Ci si può chiedere se - data una funzione C^∞ - e definiti $a_n := \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, si abbia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

LA RISPOSTA PUÒ ESSERE NEGATIVA:

NON TUTTE LE FUNZIONI C^∞ SONO UNA SERIE DI POTENZE

$$\{\text{SERIE DI POTENZE}\} \subset C^\infty$$

NON È =

QUALCHE ALTRO ESERCIZIO IN VISTA DEL SECONDO COMPITINO

ESERCIZIO Dire se la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad (f(0,0)=0)$$

su $B=\{x^2+y^2\le 1\}$ è integrabile, e in caso affermativo trovare l'integrale di f su B

Osservo che f è misurabile in quanto continua eccetto che nell'origine (ed $E:=\{(0,0)\}$ è trascurabile in $\mathbb{R}^2$)

SVOLGIMENTO SBAGLIO

USO LE COORDINATE POLARI $x=\rho\cos\theta \quad y=\rho\cos\theta$

" $dx\,dx = \rho\,d\rho\,d\theta$ "

B diventa $\{(\rho,\theta): 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1\} \Longrightarrow$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^4}\,\rho\,d\rho = \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2\theta)}{2}}_{=0}\int_0^1\frac{d\rho}{\rho} = 0$$

ATTENZIONE CHE $\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} = +\infty$

IN REALTA' Il cambio di variabile (dunque le coordinate polari) si può fare in 2 CASI

(1) f misurabile $f\ge 0$

(2) f integrabile

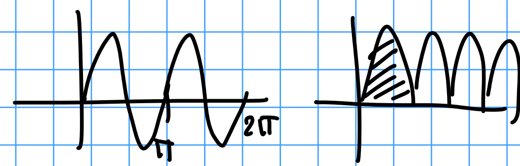
$$\left(f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \text{ su } B \right)$$

Nell'esercizio f è misurabile ma non è ≥ 0. Quindi mi serve l'integrabilità di $f \Longleftrightarrow$ integrabilità di $|f|$

Posso allora usare le coordinate polari con $|f|$.

$$\iint_B |f|\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\sin\theta\cos\theta|\,\frac{d\rho}{\rho}\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(2\theta)|}{2}\, d\theta \underbrace{\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho}}_{=+\infty} = +\infty$$



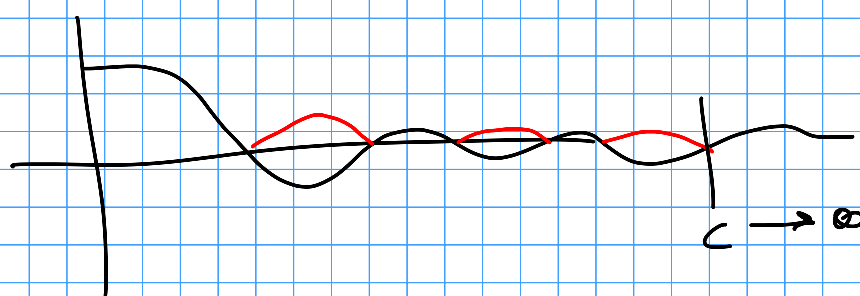
$$\frac{4}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta)\, d\theta$$

$$2\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2$$

$$\iint_B |f(x,y)|\,dx\,dy = +\infty$$

$\boxed{f \text{ NON È INTEGRABILE}}$

$\boxed{f \text{ è integrabile secondo Leb.} \iff |f| \text{ è integrabile secondo } \mathcal{L}.}$



$|f|$ $\Rightarrow$ se A_n tende a invadere $[0,+\infty[$

$$\int_{A_n} f \to \int_0^{+\infty} f$$

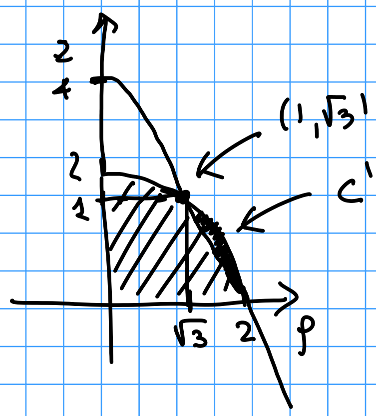
Nell'integrale improprio di $\mathbb{R}$ si prende $A_n=[0,n]$

$$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{z}\, dx\, dy\, dz$$

$$D=\{ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 4-x^2-y^2 \}$$

D è costituito dai punti della palla $B(0,2)$, sopra il paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$

D è ottenuto ruotando intorno all'asse z la figura



$z = 4 - \rho^2$

VEDIAMO COME SI INTERSECANO $z^2 + \rho^2 = 4$ $z = 4 - \rho^2$

$z^2 + \rho^2 = z + \rho^2 = 4 \implies z^2 = z \iff z = 0 \,/\, z = 1$

DUNQUE $D = \{ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 4 - x^2 - y^2 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \}$

scritto così è in forma normale

$D = \{ (x,y) \in D_1,\quad g(x,y) \leq z \leq h(x,y) \}$

$D_1 = \{ 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

$g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

$h(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

DUNQUE L'INTEGRALE SI PUÒ SCRIVERE

$$\iint_{D_1} \left(\int_{4-x^2-y^2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{z} \right) (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

Per semplicità passiamo prima in coordinate cilindriche

$$\longrightarrow \iiint_C \frac{\rho^2}{z}\, \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \qquad C = \{ z^2 + \rho^2 \leq 4,\ z \geq 4 - \rho^2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$$

$\left(C = C' \times [0, 2\pi] \quad c' \text{ come nel disegno} \right)$

$$\boxed{2\pi \iint_{C'} \frac{\rho^3}{z}\, d\rho\, d\theta}$$

$C' = \{ z^2 + \rho^2 \leq 4,\ z \geq 4 - \rho^2 \}$

lo posso fare in due modi (manca il 2π)

(1) (come stavo facendo sopra) $\displaystyle\int_{\sqrt3}^{2}\left(\int_{4-\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}}\frac{\rho^3}{z}\,dz\right)d\rho$

(2) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z^2}}\frac{\rho^3}{z}\,d\rho\right)dz$

$$\left(\begin{matrix} z^2+\rho^2\le 4 & \rho^2\le 4-z^2\\ z+\rho^2\ge 4 & \rho^2\ge 4-z\end{matrix}\right)$$

(1) $$\int_{\sqrt3}^{2}\rho^3\left[\ln z\right]_{4-\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho=\int_{\sqrt3}^{2}\rho^3\ln\left(\frac{\sqrt{4-\rho^2}}{4-\rho^2}\right)d\rho=$$

$$\int_{\sqrt3}^{2}\rho^3\ln\frac{1}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho=-\frac12\int_{\sqrt3}^{2}\overbrace{\rho^3}^{\rho\cdot\rho^2}\ln(4-\rho^2)\,d\rho=-\frac14\int_3^4 s\ln(4-s)\,ds$$

$$-\frac14\left[\frac{s^2}{2}\ln(4-s)\right]_3^4+\frac14\int_3^4\frac{s^2}{2}\frac{1}{4-s}(-1)\,ds$$

viene un ∞ se metto $s=4$

però ci sarà un altro ∞ nell'integrale che rimane.

Se voglio fare i calcoli devo calcolare la primitiva

e solo alla fine fare la differenza tra 3 e 4

IL MODO 1 È LUNGO ...

(2) $$\int_0^1\frac1z\int_{\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z^2}}\rho^3\,d\rho\,dz=\int_0^1\frac1z\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z^2}}dz=$$

$$\frac14\int_0^1\frac1z\left((4-z^2)^2-(4-z)^2\right)dz=$$

$$\frac14\int_0^1\frac1z\left((\cancel{4}-z^2-\cancel{4}+z)(4-z^2+4-z)\right)dZ=$$

$$\frac14\int_0^1\frac1z(z-z^2)(8-z-z^2)\,dz=\frac14\int_0^1(1-z)(8-z-z^2)\,dz$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \left(8 - z - z^2 - 8z + z^2 + z^3\right) dz = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(8 - 9z + z^3\right) dz =$$

$$\frac{1}{4}\left[8z - \frac{9}{2}z^2 + \frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(8 - \frac{9}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$$

$32 - 18 + 1$

(per il 2π che mi ero perso) $\longrightarrow \frac{15}{8}\pi$

Per il modo (1):

$$\int s \ln(4-s)\, ds = \frac{s^2}{2}\ln(4-s) + \int \frac{s^2}{2}\frac{1}{4-s}\, ds =$$

$$\frac{s^2}{2}\ln(4-s) + \frac{1}{2}\int \frac{s^2-16+16}{4-s}\, ds =$$

$$\frac{s^2}{2}\ln(4-s) + \frac{1}{2}\int \left(-(s+4) + \frac{16}{4-s}\right) ds =$$

$$\frac{s^2}{2}\ln(4-s) - \frac{s^2}{4} - 2s - \frac{16}{2}\ln(4-s) + c =$$

$$\frac{s^2-16}{2}\ln(4-s) - \frac{s^2}{4} - 2s = \frac{(s-4)(s+4)}{2}\ln(4-s) - \frac{s^2}{4} - 2s$$

$$\Rightarrow \int_3^4 s\ln(4-s)\, ds = \Bigg[\underbrace{\frac{(s-4)(s+4)}{2}\ln(4-s)}_{\text{fa zero per } s=4 \text{ e per } s=3} - \frac{s^2}{4} - 2s\Bigg]_3^4 =$$

$$-\frac{16}{4} - 4\cdot 2 + \frac{9}{4} + 3\cdot 2 = -\frac{7}{4} - 2 = -\frac{15}{4}$$

(se moltiplico per $-\frac{1}{4}$ e poi per 2π ritrovo $\frac{15}{8}\pi$)