Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 39 28/02/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

POSSIBILE DATA COMPITINO 22/3 pomeriggio

Serie di funzioni

Data una succ. di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}^m$ $A \subset \mathbb{R}^N$.

- la serie delle f_n converge puntualmente in A se $\forall x \in A$ la serie delle $f_n(x)$ converge e dunque è definita
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$
- la serie delle f_n converge uniformemente in A se
$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f_k \longrightarrow S \text{ UNIF.}$$

(CONV. UNIF. $\Rightarrow$ CONV. PUNT.)

OSS. Se la serie delle f_n è unif. convergente,

$\Rightarrow \quad \|f_n\|_\infty \longrightarrow 0$

CONDIZIONE NECESSARIA (MA NON SUFFICIENTE).

<u>TEOREMA</u> (CRITERIO DI "CONVERGENZA TOTALE")

Se $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ e se $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty}_{\text{CONVERGENZA TOTALE DI } \sum f_n}$

(la serie $\sum \|f_n\|_\infty$ converge)

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{1}^{\infty} f_n$ è uniformemente convergente

(CONV. TOTALE $\Rightarrow$ CONV. UNIF.)

$\cancel{\Leftarrow}$ (NON VALE SEMPRE)

Per dim. questa proprietà si fa vedere che lo spazio $\mathcal{B}_1(A;\mathbb{R}^M)$ delle funzioni limitate con la norma $\|\cdot\|_\infty$ <u>È COMPLETO</u>. DUNQUE

$\underbrace{\text{CONV. ASSOLUTA (IN } \mathcal{B})}_{\text{CONV. TOTALE}} \Rightarrow \underbrace{\text{CONV. (in } \mathcal{B})}_{\text{CONV. UNIF.}}$

TUTTE LE PROPRIETÀ DETTE sulle succ. di funz. si trasferiscono alle serie:

Abbiamo una succ. $f_n : A \to \mathbb{R}^M$. Supponiamo che la <u>serie delle f_n sia unif. conv.</u>

- (serie e limit.) Se x_0 è di acc. per A, se $\forall n$ esiste $\ell_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x)$, allora

(1) $\sum e_n$ converge

(2) $$\underbrace{\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)}_{(!!)} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n$$

• (integrazione per serie) $A=[a,b]$, $f_n: A\to\mathbb{R}$
f_n continue.

$$\underbrace{\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)}_{(!!)}$$

• (derivazione per serie) A intervallo f_n derivabili ($f_n: A\to\mathbb{R}$)

Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ ← serie delle derivate — converge unif. e

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge punt.

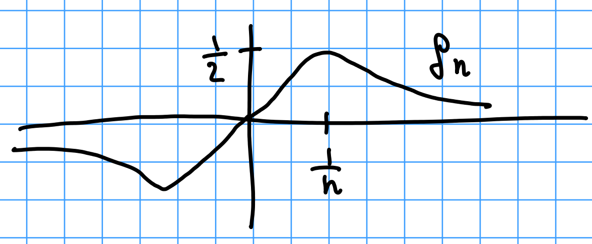
$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è derivabile e vale

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$$

cioè $$\left(\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad \Big\}(!!)$$

Inoltre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge unif.

ESEMPIO $$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$



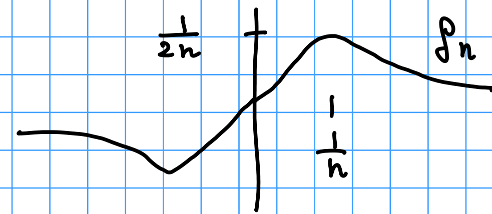
Voglio studiare $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}$

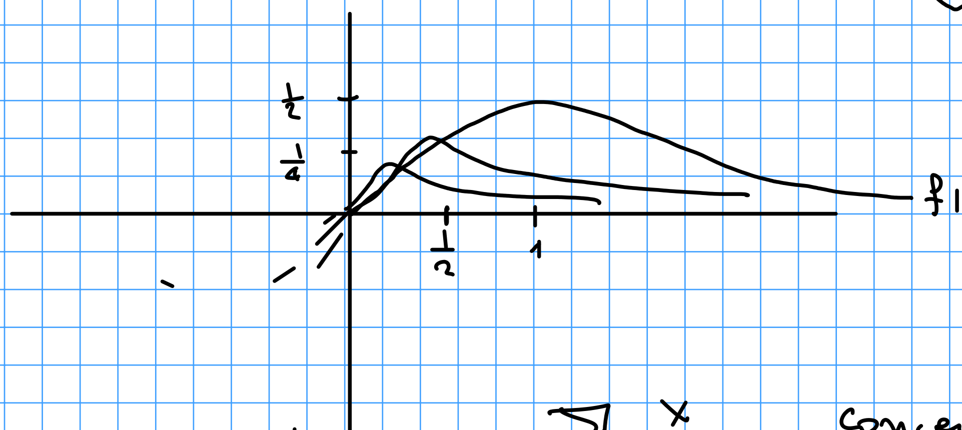
- Convergenza puntuale: dato x vedo se la serie conv.

No $\frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x^2+1/n}\right) \simeq \frac{1}{n} \leftarrow \sum \frac{1}{n}$ non conv.

CORREGGIAMO :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$





. Convergenza puntuale $\sum \frac{x}{1+n^2x^2}$ converge $\forall x$ dato che

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n^2}\frac{x}{x^2+1/n^2} \simeq \frac{1}{n^2}\frac{1}{x} \quad (\text{"nel caso } x \neq 0)$$

(ma se $x=0$ la serie è nulla)

CONVERGE PUNTUALMENTE su $\mathbb{R}$. Dunque è ben definita $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

. Conv. unif. (mi serve per vedere se f è continua, derivabile..)

- VEDIAMO SE VALE LA CONDIZIONE NECESSARIA, cioè se $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $(n\to\infty)$. Ma $\|f_n\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) = \frac{1}{2n} \to 0$, OK la condizione è vera. Purtroppo non basta

- Proviamo la convergenza totale: mi chiedo se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$. VIENE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$

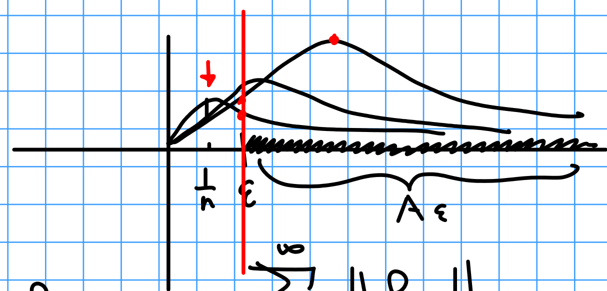
NON C'È CONVERGENZA TOTALE SU $\mathbb{R}$

- Se guardo i grafici in (*) mi viene l'idea che "ci sia un problema in $x=0$"

CERCO DI "SCANSARE" L'ORIGINE.

Fisso $\varepsilon > 0$ e considero l'intervallo $[\varepsilon, +\infty[= A_\varepsilon$

Provo a fare la convergenza totale su A_ε



Devo fare $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, A_\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \geq \varepsilon} |f_n(x)|$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \geq \varepsilon} \frac{x}{1+n^2x^2} = \sum_{n < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{2n} + \sum_{n \geq \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2}$$

(se n è grande $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow$ il max si ha in $x = \varepsilon$)

MA $\sum_{n < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{2n}$ è finita perché ci sono un numero finito di $n < 1/\varepsilon$

mentre $\sum_{n \geq 1/\varepsilon} \frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2} < +\infty$ perché $\frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{n^2}$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

DUNQUE la serie $\sum f_n$ è TOT. ($\Rightarrow$ UNIF.) CONV. su $[\varepsilon, +\infty[$, qualunque sia $\varepsilon > 0$

Da questo posso dedurre che f è CONTINUA su $[\varepsilon, +\infty[$ per ogni $\varepsilon > 0$. Dunque f è continua su $]0, +\infty[$

(ZERO NON SI RECUPERA!)

- VEDIAMO CHE f non è continua in $x=0$
(e dunque **NON C'È CONV. UNIF. su $\mathbb{R}$**)

NOTIAMO che $f(-x) = -f(x)$ e in particolare

$f(0)=0$ $\left(\text{se } x=0 \quad f_n(x)=0 \quad \forall n \right)$

MOSTRIAMO che non si ha $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

Per questo fissiamo m intero e valutiamo

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/m}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \geq$$

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \geq \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{1+1} \qquad \left(n \leq m \quad \frac{n}{m} \leq 1 \right)$$

$$= \frac{1}{m}\,\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} 1 = \frac{1}{m}\,\frac{1}{2}\, m = \frac{1}{2}$$

Ho trovato che $f\left(\frac{1}{m}\right) \geq \frac{1}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$f\left(\frac{1}{m}\right)$ NON tende a zero $\Rightarrow$ $f(x) \not\to 0$ per $x \to 0^+$

- INVECE, dato che ho la conv. unif. su $[1,+\infty[$

posso dire che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum \lim f_n = 0$$

possibile grafico di f