Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 38 27/02/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Nozioni di

CONVERGENZA PUNTUALE
CONVERGENZA UNIFORME

per una succ. di funzioni (f_n) dove $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$

Visto:

- CONV. UNIF. $\Rightarrow$ CONV. PUNT. (la conv. punt. INDIVIDUA il limite unif.)
- Se $f_n \to f$ UNIF. f_n continue $\Rightarrow$ f continua
- Se $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, f_n continue, $f_n \to f$ UNIF. $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \right)$$

- (TEOREMA da dim.) Se $f_n, f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f_n $C^1([a,b])$

e se

- $f_n \to f$ PUNT. su $[a,b]$
- $f_n' \to g$ UNIF. su $[a,b]$

$\Rightarrow$

f è derivabile, $f' = g$, $f_n \to f$ UNIF.

Dim. USO LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

(T.F.) $\left[h \text{ è } C^1 \text{ e } K = h' \iff \int_a^x K(t)\,dt = h(x) - h(a) \quad \forall x \in [a,b] \right.$ (Teorema fondamentale del calcolo) $\Big]$

Per (T.F.) $\Rightarrow$ deduco che $\forall x \in [a,b]$ (x è fissato)

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(a)$$

Passo al limite per $n \to +\infty$ conv. punt. di f_n a f.

$$\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

Per (T.F.) $\Leftarrow$ ottengo che f è C^1 e $f' = g$. Rimane da dimostrare che $f_n \to f$ unif. Prendo $x \in [a,b]$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \int_a^x g(t) + f(a) - \int_a^x f_n'(t) - f_n(a) \right| \leq$$

$$\int_a^x |g(t) - f_n'(t)|\,dt + |f(a) - f_n(a)| \leq$$

$$\int_a^b \|g - f_n'\|_\infty\,dt + |f(a) - f_n(a)| =$$

$$(b-a)\|g - f_n'\|_\infty + |f(a) - f_n(a)|$$ ← NON COMPARE x

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \leq (b-a)\|g - f_n'\|_\infty + |f(a) - f_n(a)|$$

Dunque $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ cioè $f_n \to f$ unif. #

Le proprietà di cui sopra sono sostanzialmente quelle che ci serviranno per trattare le succ/serie di funzioni

IN REALTÀ vale una versione più forte di (*)

<u>TEOREMA</u> (conv. unif e limiti). Supponiamo che $f, f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$ e che $f_n \to f$ UNIF. su A.

Supponiamo che x_0 sia punto di accumulazione per A (x_0 può anche essere $\pm\infty$, nel caso in cui $A \subset \mathbb{R}$)

e supponiamo che

$$\forall n \ \exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) =: \ell_n$$

ALLORA (1) $\exists \lim_{n\to\infty} \ell_n =: \ell$

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

(in sostanza $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$)

NON LO DIMOSTRIAMO

ESEMPIO $\frac{nx}{n^2+x^2} = f_n(x)$ $\quad f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(A=\mathbb{R},\ M=1)$

- CONV. PUNTUALE ? Si vede subito che $f_n \to 0$ PUNT. :

fisso $x \to \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2+x^2} = 0$ (n^2 VINCE SU n)

- CONV. UNIF ?? Calcolo $\|f_n\|_\infty$ e vedo se tende a zero

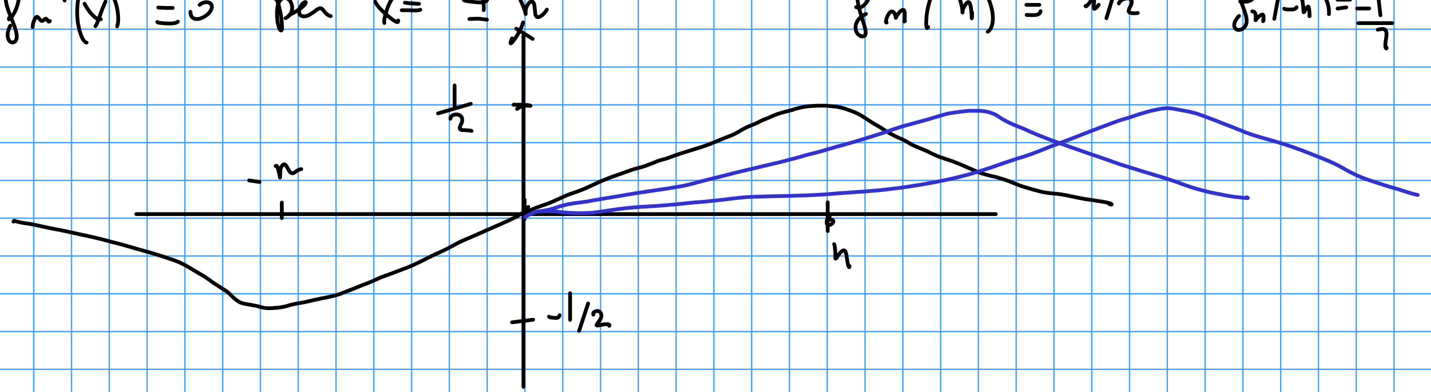
$\leftarrow -f$ $\quad$ $f \equiv 0$

Faccio uno studio di funzione di f_n per trovarne il max

$f_n(0)=0 \quad \lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$

$$f_n'(x) = \frac{n(n^2+x^2) - nx(2x)}{(n^2+x^2)^2} = \frac{n}{(n^2+x^2)^2}\left(n^2+x^2-2x^2\right) = \frac{n(n^2-x^2)}{(n^2+x^2)^2}$$

$f_n'(x) = 0$ per $x = \pm n$ $\qquad f_n(n) = 1/2 \qquad f_n(-n) = -\frac{1}{2}$



$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2} \quad (\forall n)$$

NON HO LA CONV. UNIF.

<u>OSS.</u> In questo esempio si vede che esiste una succ. (x_n) di punti di $\mathbb{R}$ tale che $f_n(x_n) = \frac{1}{2} \cancel{\to} 0$ $(x_n = n)$ (mentre $f_n(x) \to 0$ $\forall x$ fissato)
Si potrebbe dimostrare (usando la def di conv. unif) che

$$\left[\begin{array}{l} \text{se } f_n \to f \text{ unif. } \quad \text{se } x_n \to x_0 \ (\text{anche } x_0 = \pm\infty) \\ \qquad f_n(x_n) \to f(x_0) \end{array}\right]$$

Sarà più interessante studiare $\sum f_n = \sum \frac{nx}{n^2+x^2}$ ...

SERIE DI FUNZIONI

(la def è analoga a quella per le serie numeriche / serie di punti in uno spazio vettoriale con una norma)

<u>Def</u> Se $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$ considero le "SOMME PARZIALI"

$S_n \left(: A \to \mathbb{R}^M \right)$ come le funzioni

somma parziale n-esima → $$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

(S_n è una nuova successioni di funzioni, costruita a partire da f_n).

DICO che (f_n) è "SOMMABILE" oppure che la "SERIE DELLE f_n" È CONVERGENTE

- PUNTUALMENTE se $\exists\, S : A \to \mathbb{R}$ tale che $S_n \to S$ PUNT.
- UNIFORMEMENTE se $\exists\, S : A \to \mathbb{R}$ tale che $S_n \to S$ UNIF.

S si chiama "SOMMA DELLA SERIE" e si indica con $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

$\left(S(x) = \sum_1^{\infty} f_n(x)\right)$

La convergenza della serie è di fatto la convergenza delle somme parziali

Il problema tipico delle serie è che la somma S di solito non si trova esplicitamente

OSS. DI SOLITO si dice che "la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ CONVERGE" USANDO IL SIMBOLO $\sum_{n=1}^{\infty}$ per indicare la (S_n) (che non sarebbe corretto, visto che $\sum_1^{\infty} f_n$ è un numero)

OSS. La convergenza uniforme che abbiamo introdotto corrisponde a considerare uno spazio vettoriale i cui elementi sono funzioni e usare in questo spazio la norma $\| \ \|_\infty$. PIU' Precisamente posso definire

$$\mathcal{B}(A, \mathbb{R}^M) = \{ f : A \to \mathbb{R}^M , \ f \text{ limitata} \}$$

o, NEL CASO $\underline{A \text{ è limitato e chiuso}}$

$$\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M) = \{ f : A \to \mathbb{R}, \ f \text{ continua} \} \quad !!$$

ENTRAMBI $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono spazi vettoriali e in questi spazi $\|f\|_\infty$ è UNA NORMA (si verifica)

(devo prendere f limitata / continua su A limitato e chiuso per avere $\|f\|_\infty < +\infty$)

Con questa norma la convergenza uniforme è semplicemente la convergenza in $\mathcal{B} / \mathcal{C}$