Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 37   26/02/2024

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Successioni (e serie) di funzioni

Abbiamo $\forall$ (n intero) $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$

è data una funzione. Dunque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

è una "successione di funzioni".

Per esempio $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$

Def. (limite puntuale) Se (f_n) è una succ. di funzioni e se $f : A \to \mathbb{R}^M$ dico che f è il limite puntuale di f_n (per $n \to \infty$) su A, se

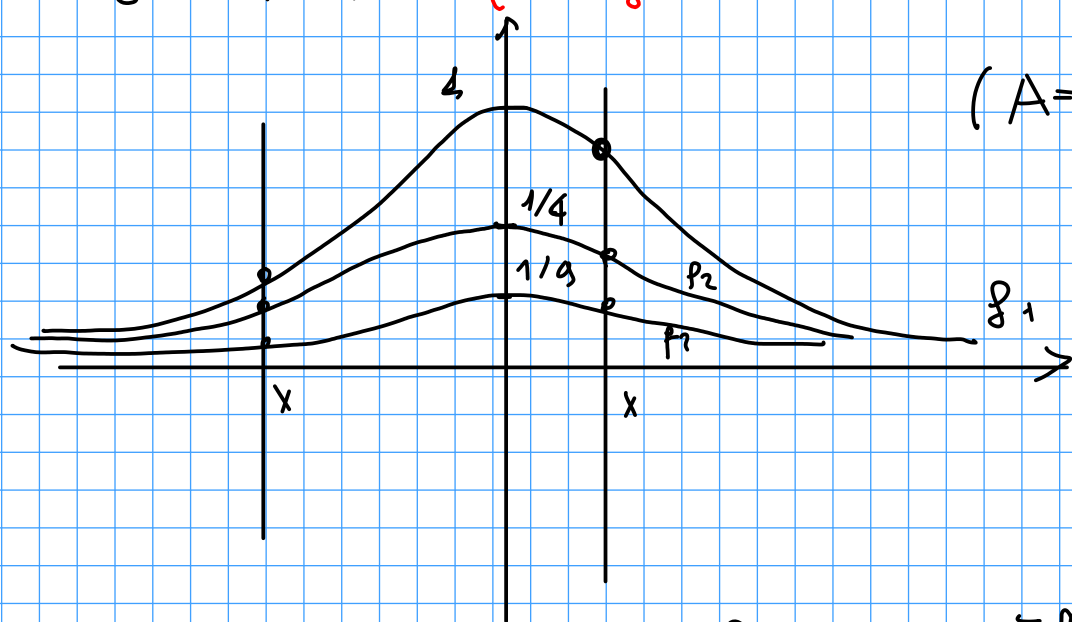
- PER OGNI $x \in A$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Nell'esempio $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = 0$$

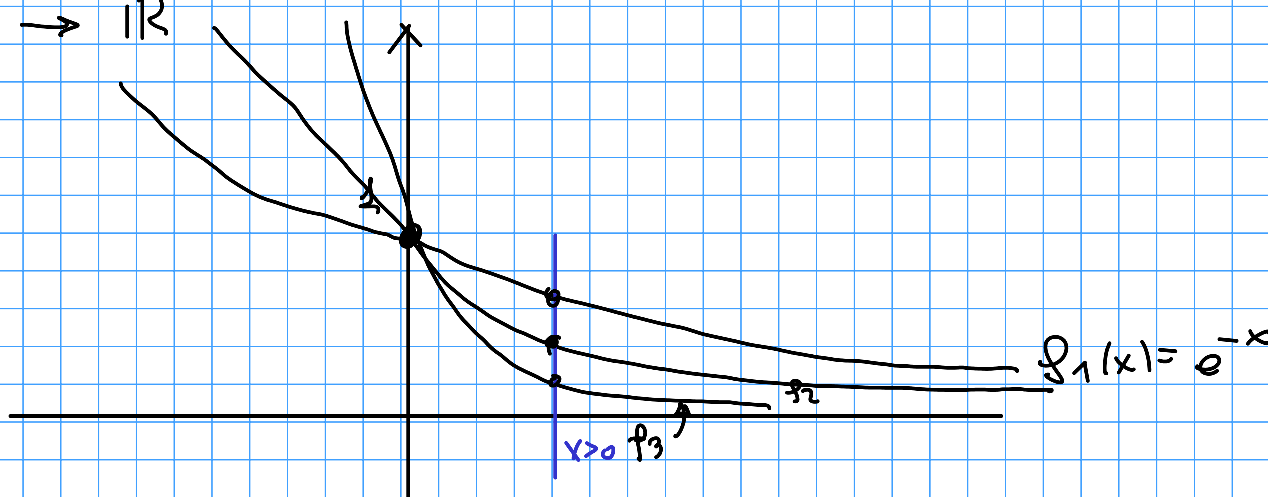
Per ogni $x \in \mathbb{R}$ (si fa il limite in n a x FISSATO)

$(A = \mathbb{R} \quad M = 1)$



Altro esempio $f_n(x) = e^{-nx}$

da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



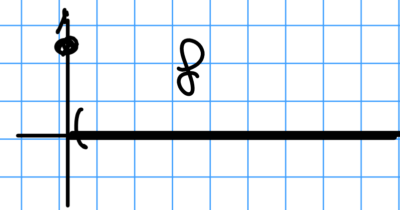
Vediamo se c'è il limite puntuale. Fisso $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ 1 & \text{se } x=0 \\ +\infty & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Non ho limite finito se $x<0$. DUNQUE le f_n

convergono puntualmente su $[0,+\infty[$ alla funzione $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ che vale:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



N.B. f è discontinua. DUNQUE PUÒ succedere che f_n siano continue, $f_n \to f$ puntualmente ma f discontinua

Lo convergenza puntuale NON MANTIENE la continuità

Serve una NOZIONE PIÙ FORTE di convergenza se si vuole che $f_n \overset{??}{\to} f$, f_n continue $\Rightarrow f$ cont.

DEFINIZIONE (convergenza UNIFORME)

(1) Se $f : A \to \mathbb{R}^M$ introduco la "NORMA UNIFORME / NORMA INFINITO" di f su A

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^M}$$ ← potrebbe essere $+\infty$

$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty, A}$ (DIPENDE DA A)

(2) Se $f_n, f : A \to \mathbb{R}^M$ dico che le f_n CONVERGONO UNIFORMEMENTE A f se

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

(se questo è vero $\|f_n - f\|_\infty < +\infty$)

OSS. Se A è limitato e chiuso, f continua $\|f\|_\infty < +\infty$

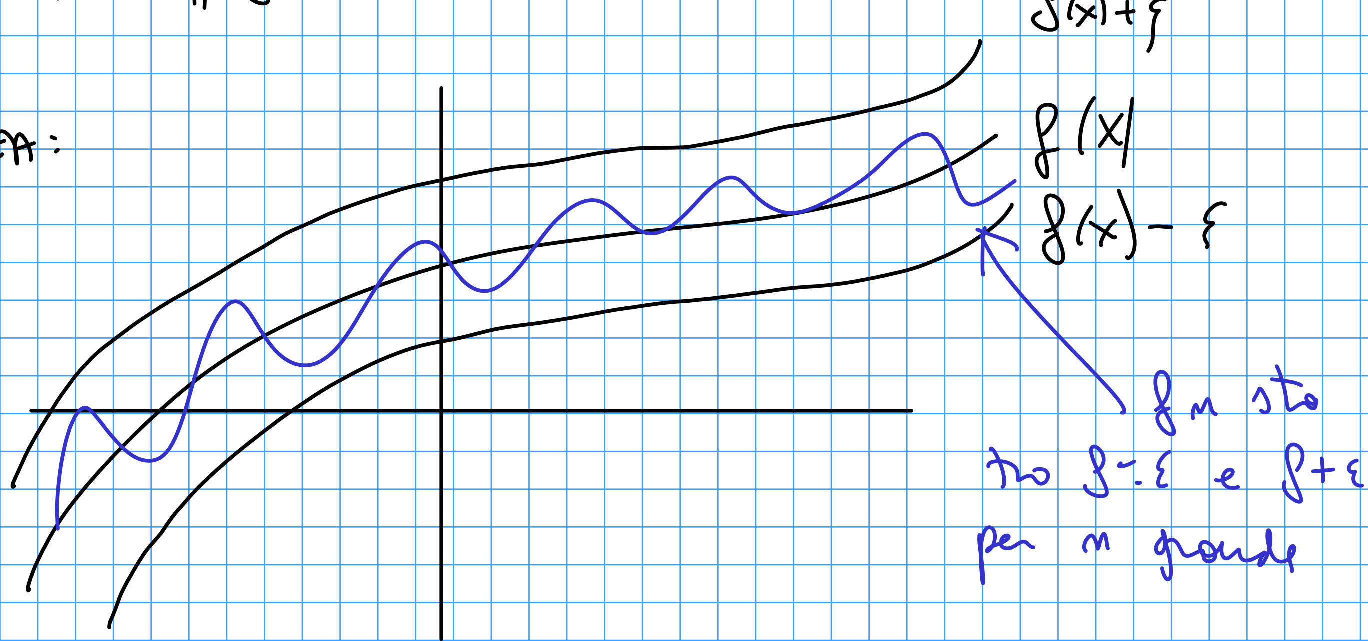
IN TERMINI DI ε e $\bar{n}$ si ha:

$f_n \to f$ UNIF. $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall n \geq \bar{n}$ $\left(\| f_n - f \|_\infty < \varepsilon \right)$

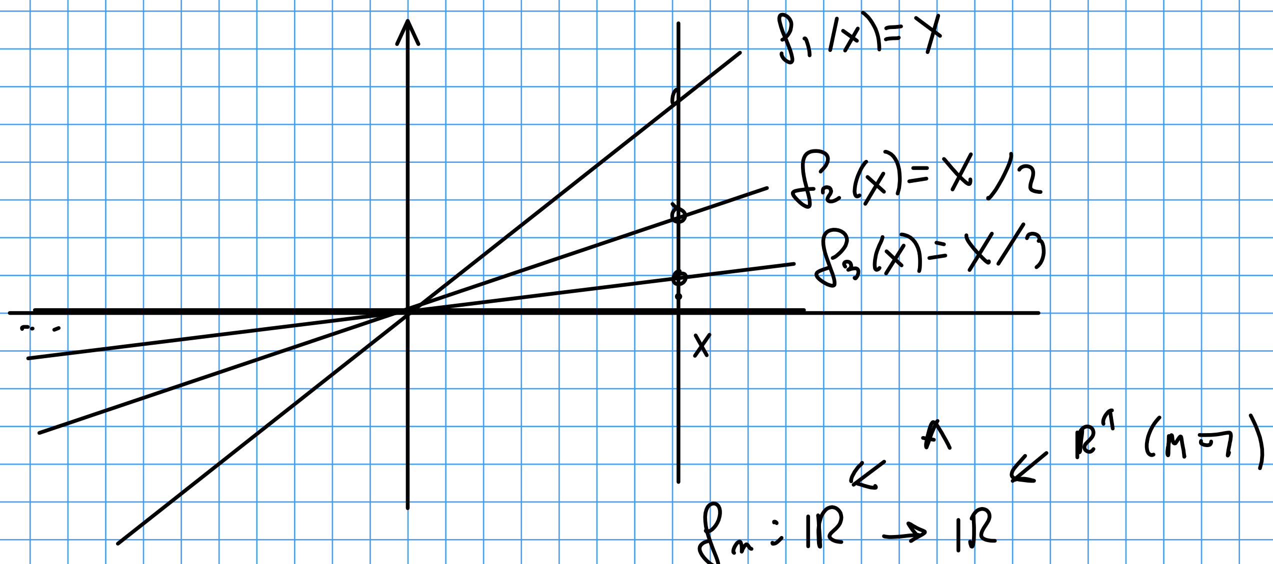
$\forall x \in A$ $\| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon$

IDEA:



VEDIAMO che la conv. unif è "di più" della conv. puntuale

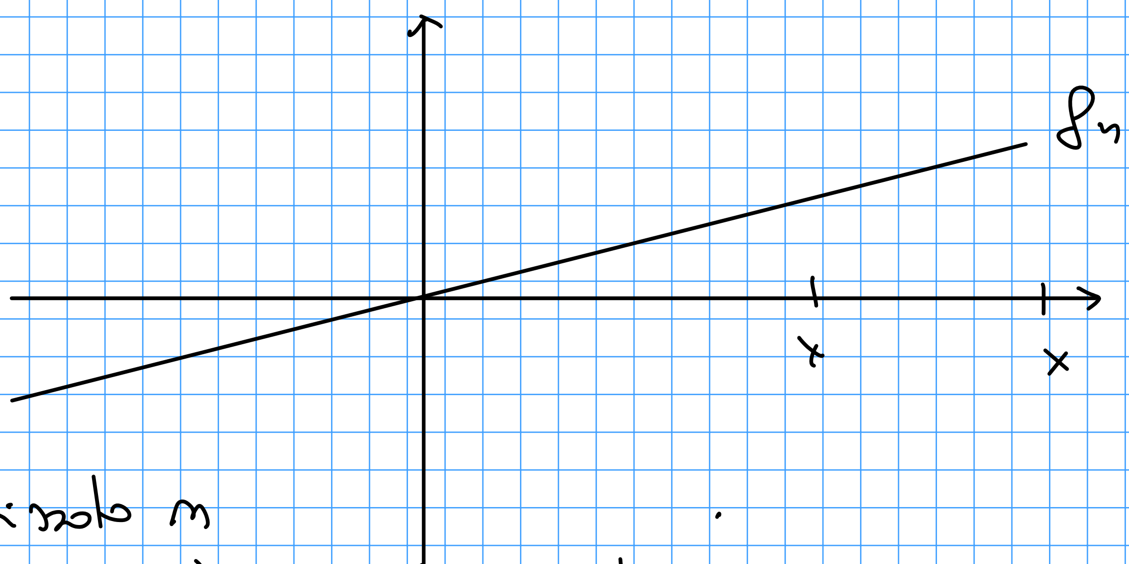
ESEMPIO $f_n(x) = x/n$



$f_n \xrightarrow{\text{punct.}} 0$ infatti, se fisso x, $\lim_{n \to \infty} \frac{x}{n} = 0$

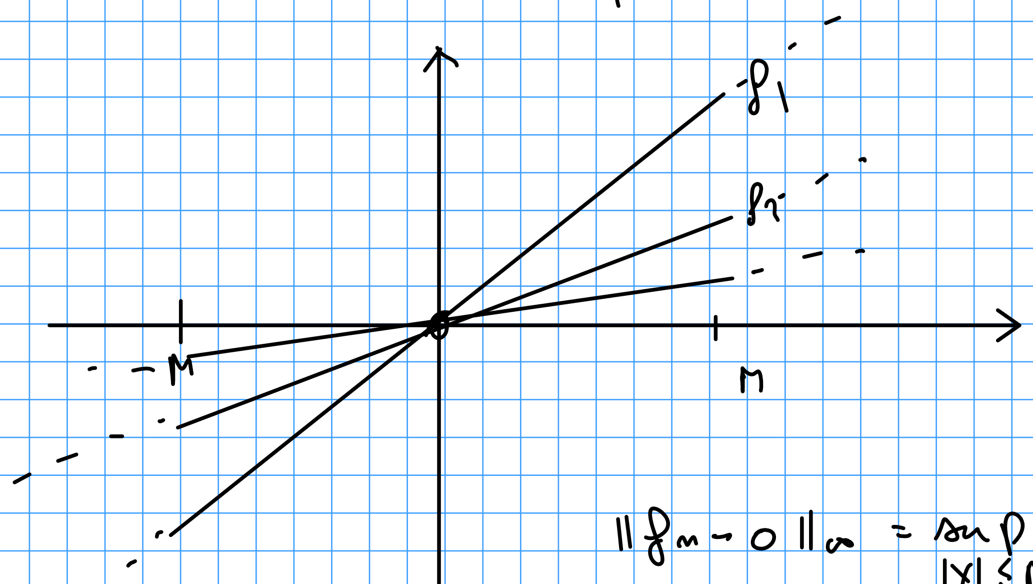
Però $\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{n} = +\infty$

e dunque $\|f_n - 0\|_\infty \to \infty$ (e non tende a zero!!)



" fissato n
la distanza (misurata con la norma ∞) tra
f_n e f è infinita "

OSS. FISSIAMO UN NUMERO $M>0$ e consideriamo l'ultimo esempio, restringendoci a $[-M, M]$



$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{|x| \le M} \frac{|x|}{n} = \frac{M}{n}$

$\to 0$ se $n \to +\infty$

DUNQUE le $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0$ su $[-M, M]$

(mentre non convergono unif su $\mathbb{R}$)

[NON CONV. UNIF. su $\mathbb{R}$ MA
CONV. UNIF SU OGNI INTERVALLO LIMITATO]

Proprietà

(1) Se $f_n \to f$ UNIF. su $A \Rightarrow$

$f_n \to f$ PUNT. su A

Infatti: si fisso $x \in A$

NON SI SCRIVE $\not\!\!\!\!\!\#$ CA x

$$\| f_n(x) - f(x) \|_{\mathbb{R}^M} \leq \| f_n - f \|_{\infty, A} \longrightarrow$$

$\Rightarrow$ $f_n(x) \to f(x)$ se $n \to \infty$

(2) Se $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ sono continue, se

$f_n \to f$ UNIF. su A $\quad (f : A \to \mathbb{R}^M)$

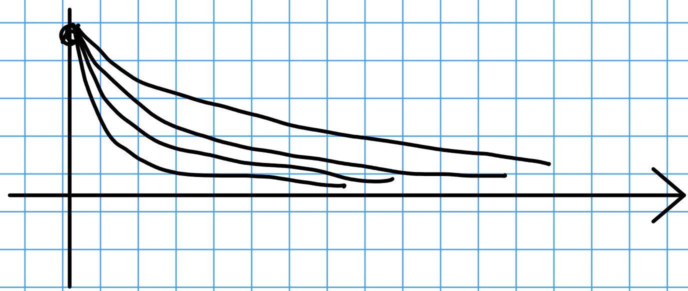
ALLORA f è continua

LA CONTINUITÀ È "STABILE" per conv. unif

(NO DIM.)

Riguardiamo l'esempio $f_n(x) = e^{-nx}$

dove $A = [0, +\infty[$



$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

LA CONV. <u>NON PUÒ ESSERE UNIFORME</u> perché le f_n sono tutte continue, ma f non è continua

le f_n se convergono devono convergere a f a causa della convergenza puntuale

POI LO POSSO VEDERE DIRETTAMENTE, dato che

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} (f_n(x) - f(x))$$

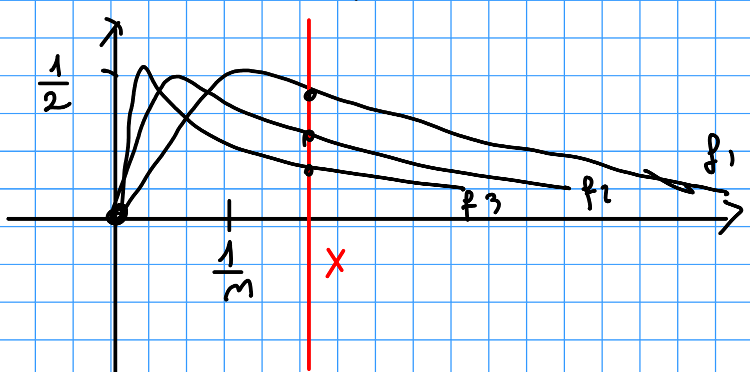
$$= \sup_{x>0} e^{-nx} = 1 \qquad \text{DUNQUE } \|f_n - f\|_\infty \not\to 0$$

ALTRO ESEMPIO

$n \geq 1$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

su $A = [0, +\infty[$. Vediamo come sono fatte le f_n



$$f_n(0) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$$

$$f_n'(x) = n\frac{(1 + n^2x^2 - x\,2n^2x)}{(1 + n^2x^2)^2} = n\frac{1 - n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \text{ se } x = \frac{1}{n}$$

$$f_n(1/n) = \frac{n/n}{1+1} = \frac{1}{2}$$

CONV. PUNTUALE

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \begin{cases} 0 & x>0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{VINCE} \\ n^2 \text{ su } n\end{array}\right) \\ 0 & x=0 \quad \left(f_n(0)=0 \ \forall n\right) \end{cases}$$

CONV. UNIF Se $f_n \to f$ necessariamente $f=0$ (a causa della conv. puntuale). Ma allora dovrebbe essere $\| f_n - f \|_\infty = \| f_n \|_\infty \longrightarrow 0$

Però

$$\| f_n \|_\infty = \sup_{x\geq 0} | f_n(x) | = \sup_{x\geq 0} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2}$$

NON C'È CONV. UNIF.

ALTRO PROBLEMA: convergenza e integrale

Se $f_n \overset{??}{\to} f$ posso dire che $\int_A f_n \to \int_A f$

(scambio tra limite e integrale $\lim \int f_n = \int \lim f_n$). Abbiamo già incontrato il teorema di Lebesgue

$f_n, f : A \to \mathbb{R}$

Lebesgue: Se $f_n \to f$ PUNT. e se esiste $g : A \to \mathbb{R}$ integrabile per cui

$$| f_n(x) | \leq g(x)$$

$$\Rightarrow \int_A f_n \to \int_A f$$

PERÒ MI INTERESSA ANCHE CONFRONTARE QUESTO PROBLEMA CON LA CONV. UNIF.

TEOREMA Se A è limitato e chiuso e f_n sono continue, $f_n \to f$ UNIF. SU A

ALLORA $$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$$

(gli integrali di f_n esistono perché f_n sono continue. Per il teorema di prima anche f è continua $\Rightarrow \int_A f$ esiste)

DIM.

$$\left|\int_A f_n(x)\,dx - \int_A f(x)\,dx\right| =$$

$$\left|\int_A \big(f_n(x) - f(x)\big)\,dx\right| \leq$$

$$\int_A |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_A \|f_n - f\|_\infty\,dx$$

$$= m(A)\,\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

Se A è limitato e chiuso, c'è una stabilità dell'integrale rispetto alla conv. unif.

ALTRO PROBLEMA: CONVERGENZA e DERIVATA.

Se $f_n \xrightarrow{??} f$ e f_n sono derivabili, posso dire (?!) che f è derivabile e $f_n' \xrightarrow{??} f'$

POSSO SCAMBIARE limite e derivata !?

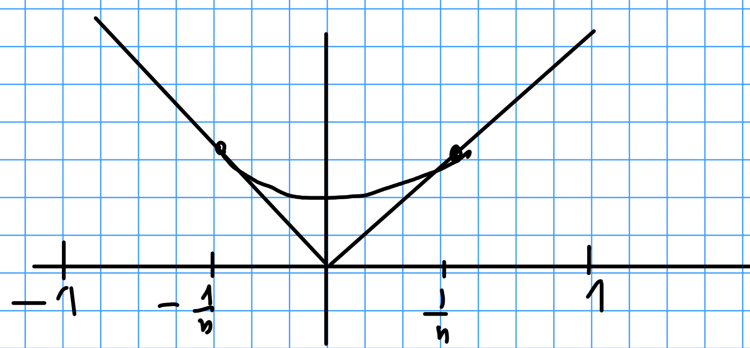
$$\lim f_n' = \left(\lim f_n\right)'$$

IL PROBLEMA SI PONE PER LA CONV. UNIF.

PURTROPPO LA RISPOSTA - ALL'INIZIO - <u>È NEGATIVA</u>

NON POSSO DEDURRE LA DERIVABILITÀ DI f DA $f_n \to f$ UNIF. (anche se f_n sono derivabili)

<u>ESEMPIO</u>



$f(x) = |x|$ NON È DERIVABILE (IN $x=0$)

su $A = [-1, 1]$. Cerco f_n derivabili con $f_n \to f$ unif. Dato $n \geq 1$ costruisco una parabola in $[-1/n, 1/n]$ che negli estremi "si raccordi" con $|x|$. Cioè cerco

$$f_n(x) = a_n x^2 + b_n \quad \text{in modo che}$$

$$f_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \qquad f_n'\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1$$

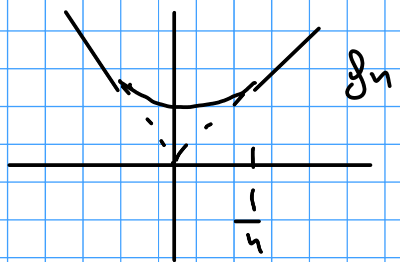
$$a_n \frac{1}{n^2} + b_n = \frac{1}{n} \qquad 2 a_n \frac{1}{n} = 1$$

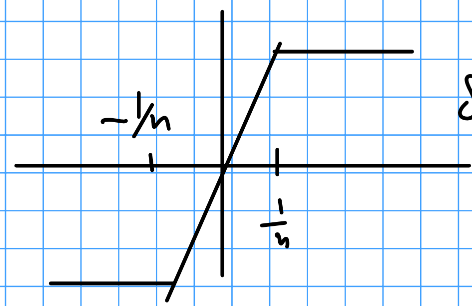
$$\Updownarrow$$

$$\frac{n}{2}\frac{1}{n^2} + b_n = \frac{1}{n} \qquad a_n = \frac{n}{2} \qquad \Rightarrow b_n = \frac{1}{2n}$$

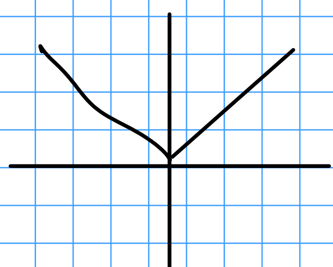
DUNQUE
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{se } |x| \le \frac{1}{n} \\ |x| & \text{se } \frac{1}{n} \le |x| \le 1 \end{cases}$$

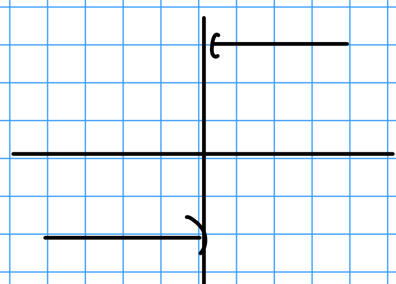
(se non ho sbagliato i conti) f_n è derivabile in $[-1,1]$





$$\left(f_n' = nx \quad |x| \le \frac{1}{n} \right)$$





Si vede facilmente che $\|f_n - f\|_\infty =$

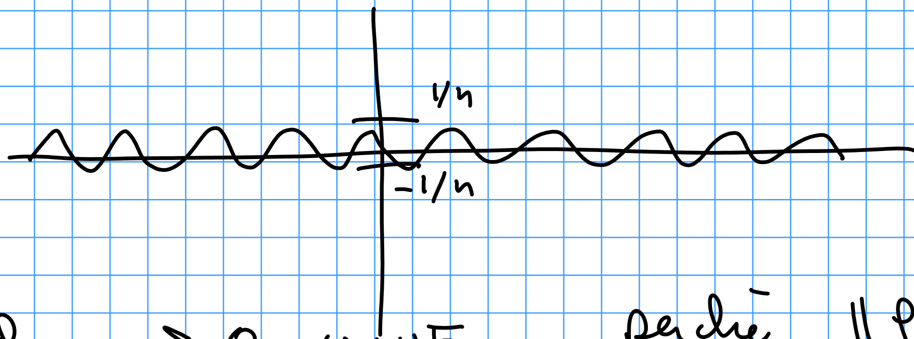
$$\max_{0 \le x \le \frac{1}{n}} \left(\frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} - x \right) = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$$

fare i calcoli

DUNQUE $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ ma f NON È DERIV.

SI PUÒ FARE UN ALTRO CONTROESEMPIO DI NATURA DIVERSA

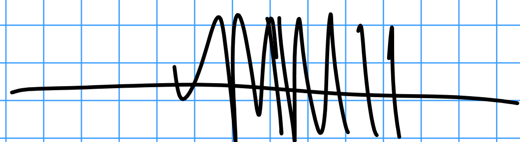
$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ su $\mathbb{R}$



$f_n \to 0$ UNIF perché $\|f_n\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{n}$

però $f_n'(x) = \cos(nx)$

NON TENDONO A NIENTE! SICURAMENTE NON TENDONO PUNT. A 0



(non è immediato dimostrarlo ma si capisce)

Se si aggiunge qualcosa si può "recuperare" la derivata

TEOREMA (scambio tra limite e derivata)

Siano $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ A intervallo in $\mathbb{R}$

Supponiamo che

- $f_n \to f$ puntualmente su A
- f_n siano derivabili
- $\exists\, g : A \to \mathbb{R}$ tale che $f_n' \to g$ UNIF.

ALLORA f è derivabile, $f' = g$ e $f_n \to f$ UNIF.