Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 36 18/12/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Teorema (Fubini) $f : \mathbb{R}^{N+M} \to [-\infty, +\infty]$ integrabile

Allora

(a) Per q.o. $x$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è integrabile (in $y$)

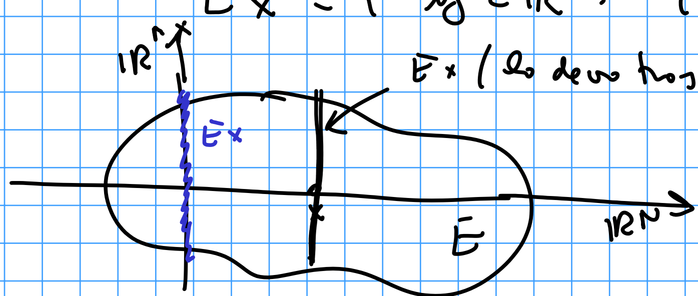
(b) La funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$ (definita in modo arbitrario nelle $x$ in cui $y \mapsto f(x,y)$ non è integr.) è INTEGRABILE (in $x$)

(c) $$\int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy$$

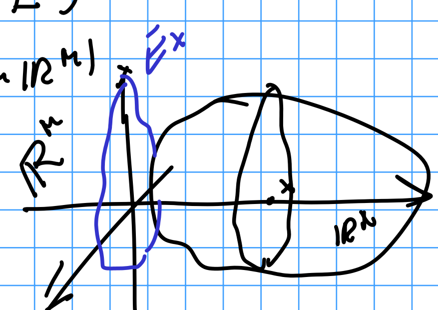
CONSEGUENZE

$E \subset \mathbb{R}^{N+M}$. Dato $x \in \mathbb{R}^N$ pongo

$$E_x = \{ y \in \mathbb{R}^M : (x,y) \in E \}$$




$E_x$ (la devo trasferire su $\mathbb{R}^M$)



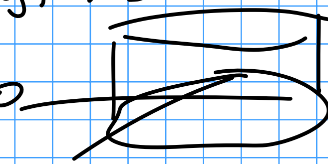
Se $E$ è misurabile si ha

$$m_{N+M}(E) = \int_{\mathbb{R}^N} m_M(E_x)\,dx$$

Infatti basta applicare Tonelli alla funzione caratteristica di $E$

$$f(x,y) = \mathbb{1}_E(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y)\in E \\ 0 & \text{se } (x,y)\notin E \end{cases}$$

$f$ è misurabile ($\Leftarrow E$ mis. – si dimostra), $f \geq 0$



Applico Tonelli

$$m(E) = \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} \mathbb{1}_E(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\int_{\mathbb{R}^M} \underbrace{\mathbb{1}_E(x,y)}_{\mathbb{1}_{E_x}(y)}\,dy\Big)dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_M(E_x)\,dx$$

<u>Esempi</u> $\quad E = B(0,R)$ in $\mathbb{R}^3 \qquad E = \{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$

Scrivo $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^2_{(y,z)} \qquad (N=1 \quad M=2)$

$$\Rightarrow m_3(B(0,R)) = \int_{\mathbb{R}} m(E_x)\,dx = \circledast$$

$$E_x = \{(y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } |x| > R \\ B_2(0, \sqrt{R^2-x^2}) \end{cases}$$

$$\circledast = \int_{\{|x|\leq R\}} \underbrace{m_2(B(0,\sqrt{R^2-x^2}))}_{\text{do per buono che area del cerchio} = \pi r^2}\,dx = \int_{-R}^{R} \pi(R^2-x^2)\,dx =$$

$$\pi\Big[R^2x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-R}^{R} = 2\pi\Big(R^2R - \frac{R^3}{3}\Big) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Volendo – con lo stesso sistema – vedo che l'area di $\underbrace{\{x^2+y^2\leq r^2\}}_{E}$

è quello che ho detto:

$$m_2(B(0,r)) = \int_{\mathbb{R}} \left( m(E_x) \right) dx = \qquad E_x = \begin{cases} \emptyset & |x| > R \\ [-\sqrt{r^2-x^2}, +\sqrt{r^2-x^2}] & \end{cases}$$

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{r^2-x^2}\, dx = 4 \int_0^R \sqrt{r^2-x^2}\, dx$$

$x = r\sin(\theta)$ $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ $\quad dx = r\cos(\theta)\, d\theta \Longrightarrow$

$$m_2(E) = 4\int_0^{\pi/2} r^2 \cos^2(\theta)\, d\theta = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{\cos(2\theta)+1}{2}}_{\text{dà zero}} =$$

$$4r^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \pi r^2$$

---

**CONSEGUENZA (di F/T)**

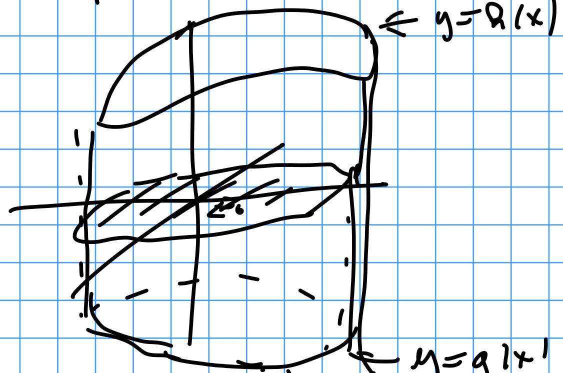
$E \subset \mathbb{R}^{N+1}$ NORMALE RISPETTO ALL'ASSE $N+1$

CIOÈ:

$$E = \{ (x,y) : x \in E_0 , \ g(x) \le y \le h(x) \}$$

dove $E_0 \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e $g, h$ misurabile

(tipicamente $E_0$ è un dominio regolare, $g, h$ continue)




Inoltre ho $f : E \to [-\infty, +\infty]$ misurabile e $\ge 0$ su $E$ (integrabile su $E$)

Allora

$$\int_E f(x,y)\, dx\, dy = \int_{E_0} \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Segue da Tonelli/Fubini considerando la funzione

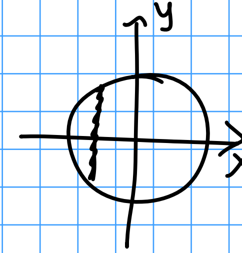
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{su } E \\ 0 & \text{fuori } E \end{cases}$$

---

**ESEMPIO** $\quad B = \{x^2+y^2 \le 1\} \qquad f: B \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{1}{\|(x,y)\|^{2\alpha}} \qquad \alpha > 0$$

Posso usare Tonelli




Noto che B è NORMALE (sia in x che in y)

$$B = \{ (x,y) : \underbrace{-1 \le x \le 1}_{E_0} , \underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{g(x)} \le y \le \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{h(x)} \}$$

$$\int_B f\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{(x^2+y^2)^\alpha} \right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{2\alpha}} \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^\alpha} \right) dy$$

Faccio un cambio di variabile $\quad \frac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = tx \Rightarrow dy = x\,dt$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2)^\alpha} \left( \int_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}} \frac{x\,dt}{(1+t^2)^\alpha} \right) dx = 4 \int_0^1 \frac{x}{(x^2)^\alpha} \left( \int_0^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} \right) dx$$

Il calcolo preciso sembra complicato — vediamo se riusciamo a capire per quali $\alpha$ l'integrale è $< +\infty$

(QUESTO CI DIRÀ SE $f$ è integrabile o meno su $B$)

Cerchiamo di capire come è l'integrale: $y$ dipende da $x$ $(x>0)$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} \le \int_0^{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \frac{dt}{t^{2\alpha}} = \frac{t^{-2\alpha+1}}{-2\alpha+1} \Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}$$

$1-2\alpha \neq 0$ (se no trovo un ln)

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } 1-2\alpha < 0 \\ +\infty & \text{se } 1-2\alpha = 0 \quad \text{(usando un altro calcolo)} \\ \frac{1}{1-2\alpha}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)^{1-2\alpha} & 1-2\alpha > 0 \end{cases}$$

(se $1-2\alpha <$ non posso concludere che l'integrale $= +\infty$

Faccio comunque il calcolo con $\alpha < \frac{1}{2}$

Ho integrale $x \leq C_\alpha \left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{\frac{1}{2}\cdot(1-2\alpha)} = C_\alpha \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}$

LO METTO NELL'INTEGRALE IN $x$ $>0$

$$\iint_B f \leq C_\alpha \int_0^1 \frac{x}{(x^2)^\alpha}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} dx$$

$$\leq C \int_0^1 \frac{x}{x^{2\alpha}\, x^{1-2\alpha}}\, dx = C\int_0^1 dx < +\infty$$

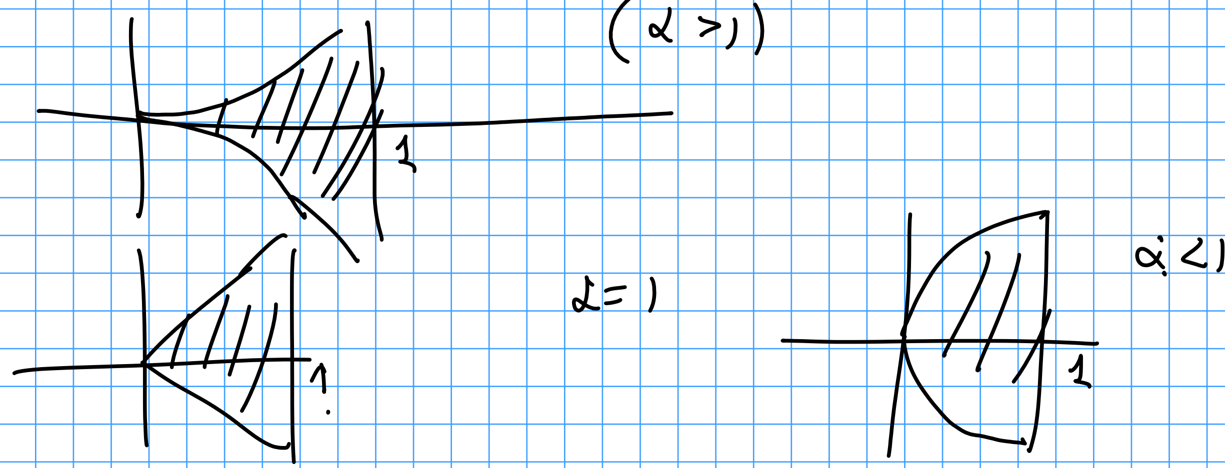
DI SICURO $f$ è INTEGRABILE SE $\alpha < \frac{1}{2}$

Se $\alpha \geq \frac{1}{2}$ non si vede bene in questo modo (perché prima ho fatto una maggiorazione)

---

ALTRO ESEMPIO $E_\alpha = \{(x,y):\ 0\leq x\leq 1,\ |y|\leq x^\alpha\}$

$\alpha>0$




$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)}$$

Vediamo se è integrabile su $E_\alpha$ (al variare di $\alpha$)

Di nuovo posso usare Tonelli ( $f$ è continua su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ )

$E_\alpha$ è misurabile per come è costruito ( è normale rispetto a $y$)

$$\int_{E_\alpha} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-x^\alpha}^{x^\alpha} \frac{dy}{x^2+y^2}\right) dx =$$

$$2\int_0^1 \left(\int_0^{x^\alpha} \frac{dy}{x^2+y^2}\right) dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2}\left(\int_0^{x^\alpha} \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)$$

$\frac{y}{x} = t \iff y = tx \implies dy = x\,dt \Rightarrow$

$$2\int_0^1 \frac{dx}{x^2}\, x \int_0^{x^{\alpha-1}} \frac{dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x}\Big[\arctan y\Big]_0^{x^{\alpha-1}} =$$

$$2\int_0^1 \frac{\arctan(x^{\alpha-1})}{x}\,dx$$

CASO $0<\alpha<1 \implies -1<\alpha-1<0$ $\quad (x^{\alpha-1} \to +\infty$ se $x\to 0)$

$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) \le \arctan(x^{\alpha-1}) \le \frac{\pi}{2}$

e l'integrale è $\ge 2\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$

DUNQUE se $0<\alpha<1$ $f$ non è integrabile su $E_\alpha$

CASO $\alpha=1$ (simile al precedente) e $f$ NON è INT.

CASO $\alpha>1$ Allora $x^{\alpha-1}$ è Lo 0 a 1

e quando $x\to 0$ $\arctan(x^{\alpha-1}) \simeq x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{\arctan(t)}{t} \underset{t\to 0}{\to} 1\right)$

DUNQUE L'INTEGRANDO è asintotico a $\frac{2x^{\alpha-1}}{x} = \frac{2}{x^{2-\alpha}}$

Ne segue che l'integrale è finito SE $\underbrace{2-\alpha}_{\beta} < 1$

$\left(\int_0^1 \frac{dt}{t^\beta} < +\infty \iff \beta<1\right)$ $\iff \alpha>1$

IN DEFINITIVA $\int_{E_\alpha} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} < +\infty \iff \boxed{\alpha>1}$

Si capisce che $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ NON È INTEGRABILE

su $B(0,r)$


Ma è integrabile su $E_\alpha$ per $\alpha>1$.

## TEOREMA (cambio di variabile)

Supponiamo che $W$ sia un aperto di $\mathbb{R}^N$ e che $\Phi : W \to W_1$ $\left(\subseteq \mathbb{R}^N\right)$ sia "un diffeomorfismo" - cioè UNA funzione biettiva di classe $C^1$ con inversa di classe $C^1$ ($\Rightarrow W_1$ è anche lui aperto)

Dunque $\forall\, x \in W$ $\exists\, J_\Phi(x)$ e ha determinante $>0$

Infatti so che $I = J_{\Phi^{-1}}(\Phi(x))\, J_\Phi(x) \Rightarrow$

$$1 = \det(I) = \underbrace{\det J_{\Phi^{-1}}(\Phi(x))}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det J_\Phi(x)}_{\neq 0}$$

Sia inoltre $f : W_1 \to \overline{\mathbb{R}}$, $f$ misurabile su $W_1$.

Ci sono due possibili enunciati:

(a) Se $f \geq 0$ allora

$(f \circ \Phi)|\det J_\Phi|$ è misurabile su $W$ e vale

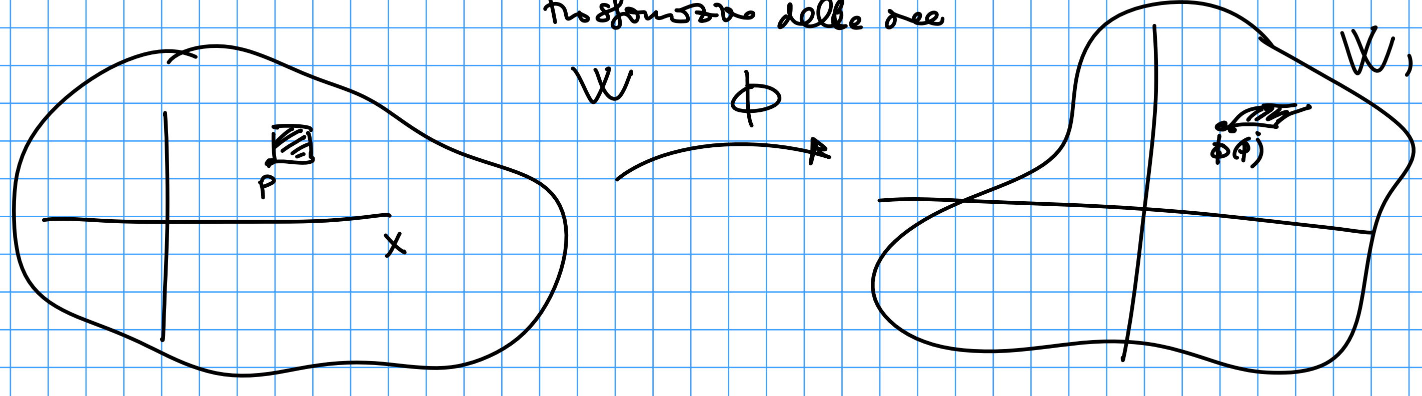
$$\int_{W_1} f(y)\, dy = \int_W f(\Phi(x))\, |\det J_\Phi(x)|\, dx$$

(VALORE $+\infty$ AMMESSO)

(b) Se $f$ è integrabile su $W_1$ allora

$(f \circ \Phi)|\det J_\Phi|$ è integrabile e vale la stessa formula

(Idea $|\det J_\Phi(x)|$ rappresenta il "tasso" di trasformazione delle aree



QUESTO TEOREMA SPESSO SI USA IN FORMA INDEBOLITA ( NON SEMPRE $\phi$ è bigettivo)
L'IMPORTANTE È CHE "le ipotesi valgano quasi dappertutto" OPPURE $W$ non è aperto...

## ESEMPIO DELLE COORDINATE POLARI

Definisco $\phi(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$\phi$ è $C^1$ e $J_\phi = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$

$\boxed{\det J_\phi = \rho}$ $\left( \phi(\rho,\theta) = \mathbb{R}^2 \text{ se } \rho\geq 0, \theta\in\mathbb{R} \right)$

Vedo che $|\det J_\phi| > 0 \iff \rho \neq 0$

DICIAMO che a me interessano i $\rho \geq 0$
mi verrebbe da dire che $W = \{\rho\geq 0, \theta\in\mathbb{R}\}$ NON È APERTO

$W = \{\rho > 0, \theta\in\mathbb{R}\}$ è aperto ??
ma non descrive tutto $\mathbb{R}^2$ ..

DAL TEOREMA POSSO RICAVARE:

se $W = \{\rho > 0 \quad 0 < \theta < 2\pi\}$
$\Rightarrow$ su $W$ $\phi$ è un diffeomorfismo. $\left( \phi(W) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\} \right)$

DUNQUE se $E \subset W$ e $f : \phi(E) \to \mathbb{R}$
posso scrivere

$$\iint_{\phi(E)} f(x,y)\,dx\,dx = \iint_E f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta))\,d\rho\,d\theta$$

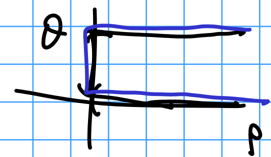
PERÒ SE $E_1 \subset \{\rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ la formula

$$\iint_{\Phi(E_1)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{E_1} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,d\rho\,d\theta$$

VALE ANCORA perché io posso definire

$E = E_1 \cap \{\rho > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi\}$

ho che $E_1 \setminus E$ è trascurabile



$$\iint_{\Phi(E_1)} \bigcirc = \iint_{\Phi(E)} \qquad \Big/ \qquad \int_{E_1} = \int_E$$

---

ESEMPI $\qquad f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \qquad \alpha > 0$

MI CHIEDO SE È INTEGRABILE SU $B = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

Uso la versione del cambio di variabile (in coord. polari) per le funzioni misurabili $\geq 0$ — $+\infty$ è ammesso)

$$\iint_B \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \iint_D \frac{d\rho\,d\theta}{(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)^\alpha}\rho = \iint_D \frac{d\rho\,d\theta}{\rho^{2\alpha-1}}$$

dove $D = \{0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ⇐ È UN INSIEME NORMALE

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}}\,d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}$$

Questo integrale è finito $\iff 2\alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 1$

e in tal caso vale $\dfrac{2\pi}{2-2\alpha}\left[\rho^{2-2\alpha}\right]_0^1 = \dfrac{\pi}{1-\alpha}$

IN ALTRI TERMINI $\qquad \displaystyle\iint_B \frac{dx\,dy}{\|(x,y)\|^\beta} < +\infty \iff \beta < 2$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\displaystyle\int_{B_N} \frac{dx}{\|x\|^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha < N$

( $B_N \subset \mathbb{R}^N$ palla )