Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 35 13/12/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

(secondo Lebesgue)

<u>VISTO:</u> NOZIONE DI
- INSIEME MISURABILE $E \subset \mathbb{R}^N$
- FUNZIONE MISURABILE $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$

e alcune proprietà di questi "oggetti".

VISTO LA NOZIONE DI INTEGRALE

<u>Def</u> Data una funzione $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ MISURABILE, con $f \geq 0$ definisco l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = m_{N+1}\Big(\underbrace{\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^N \ 0 \leq y \leq f(x)\}}_{\in \mathbb{R}^{N+1}}\Big) \quad [0,+\infty]$$

- Le funzioni misurabili positive HANNO SEMPRE INTEGRALE, che può fare $+\infty$

Data una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$, dico che f <u>È INTEGRABILE</u> se f^+, f^- hanno integrale finito.

In tal caso chiamo INTEGRALE DI f il numero reale

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx$$

- Le funzioni integrabili HANNO INTEGRALE FINITO.
- Se una funzione misurabile cambia segno non è detto che

obbl. integrale.

PROPRIETÀ (continuazione)

- Se E è aperto / chiuso $\Rightarrow$ E è misurabile
- Se f, g ammettono integrale, $f \geq g \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f \geq \int_{\mathbb{R}^N} g$

IN PARTICOLARE se f mis. $f \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f \geq 0$

- Se f è integrabile $\Rightarrow$ $\{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| = +\infty\}$ è trascurabile (cioè ha misura zero).
- Se f è misurabile e g è un'altra funzione tale che $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ è trascurabile

$\Rightarrow$ g è misurabile

SI USA DIRE "se $g = f$ quasi ovunque" allora g è misurabile

[IN GENERALE se ho una proprietà $P(x)$ che dipende da $x \in \mathbb{R}^N$ dirò che "P vale quasi ovunque" oppure "$P(x)$ è vero per quasi ogni x" se $\{x : P(x) \text{ è falso}\}$ è di misura nulla (è trascurabile)]

Se poi f è integrabile, e $g = f$ quasi ovunque $\Rightarrow$ anche g è integrabile e $\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} g$

["Le proprietà di misurabilità / integrabilità NON CAMBIANO se modifico f su un trascurabile"]

- [f integrabile $\Leftrightarrow$ $|f|$ integrabile (è una conseguenza immediata della def. di integrabilità)]
- Se f è integrabile secondo Riemann (caso di A1)

$\Rightarrow$ f è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali sono gli stessi

• Se f è assolutamente integrabile in senso improprio, secondo R,

$\Rightarrow$ f è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali sono gli stessi.

Se f è int. secondo R in senso improprio MA NON ASSOLUTAMENTE

$\Rightarrow$ f NON è integrabile secondo $\mathcal{L}$.

Per es $\frac{\sin(x)}{x}$ non è integrabile su $\mathbb{R}$, secondo $\mathcal{L}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$\alpha \neq 1$ (se no c'è un logaritmo)

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c x^{-\alpha}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^c =$$

$$\lim_{c\to+\infty} \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \frac{1}{\alpha-1}$$

• (Passaggi al limite sotto il segno di integrale)

Suppongo che (f_n) sia una successione di funzioni misurabili. $(f_n : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}})$

(a) Se $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ e se definisco

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x) \quad \left(= \sup_{n\geq 1} f_n(x)\right)$$

ALLORA f è misurabile e

$[0,+\infty]$ $\ni$ $$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\, dx \left(= \sup_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\, dx\right)$$

(TEOREMA DI CONVERGENZA MONOTONA)

(b) Se f_n sono misurabili e se esiste $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{per quasi ogni } x$$

Allora f è misurabile.

Se inoltre (<u>CONVERGENZA DOMINATA</u>) esiste $g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ INTEGRABILE e tale che

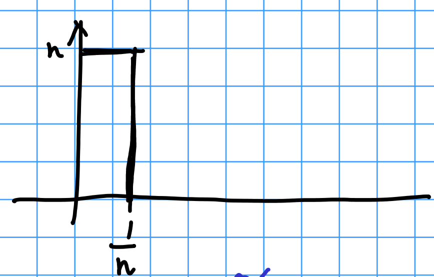
$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \text{per quasi ogni } x$$

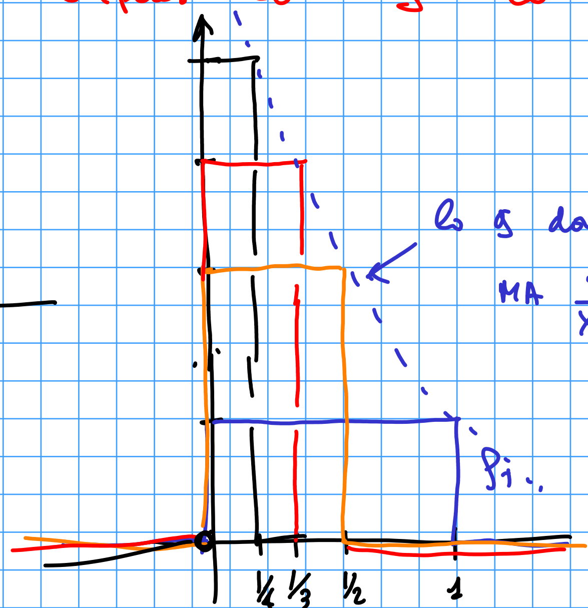
(dunque!! ogni f_n è integrabile e f è anche lei integrabile) e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\,dx$$

ATTENZIONE: Se manca l'ipotesi con g la tesi può essere falsa.

Esempio





la g dovrebbe essere $\sim \frac{1}{x}$

MA $\frac{1}{x}$ NON è INTEGRABILE

definisco $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Diamo per buono che le f_n sono tutte misurabili.

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} n\,dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

TUTTE le f_n hanno integrale 1

Esiste $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$?? . Devo fissare x e fare il limite rispetto a n.

Se $x \leq 0$ tutte le $f_n(x)$ sono zero $\Rightarrow$ $f_n(x) \to 0$

Se $x > 0$, quando $n > \frac{1}{x}$ $f_n(x) = 0$ $\left(\frac{1}{n} < x\right)$

dunque anche se $x>0$ $\quad f_n(x) \to 0$

DUNQUE $\quad f_n(x) \to \underset{=f(x)}{0}$ per ogni x

NON È VERO CHE $\quad \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_n\,dx}_{1\ \forall n} \to \int_{\mathbb{R}} f(x) = 0$

CONTINUO LE PROPRIETÀ

- Se f è misurabile e $|f| \le g$ con g integrabile
  $\Rightarrow$ f è integrabile e
$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx\right| \le \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,dx \quad \left(\le \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\,dx\right)$$

- - Se f è continua $\Rightarrow$ f è misurabile.
  - Se E è misurabile, allora la "funzione caratteristica" di E:
$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases} \quad \text{è misurabile}$$

INOLTRE se $m(E) < +\infty$ $\Rightarrow$ $\mathbb{1}_E$ è integrabile e
$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_E(x)\,dx = m(E)$$

- Se $f(x) = h(x)\,\mathbb{1}_E(x)$ dove h è continua e E misurabile
  $\Rightarrow$ f è misurabile.

<u>Def.</u> Sia $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ $\quad E \subset \mathbb{R}^N$

Dico che f è misurabile in E se la funzione
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases} \quad \text{è misurabile} \quad (\text{in } \mathbb{R}^N)$$

Supponiamo che f sia misurabile in E. (1) Se $f \ge 0$

definisco $$\int_E f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^\nu} \tilde f(x) \in [0,+\infty]$$

Dico che f è integrabile su E, se f è misurabile su E e $\tilde f$ è integrabile. Pongo in questo caso

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^\nu} \tilde f(x)\,dx$$

[Questo torna con il caso in cui $f(x) = h(x)\mathbb{1}_E$ con E misurabile e h continua]

TEOREMI DI "INTEGRAZIONI ITERATE"
(ci dicono come calcolare gli integrali in $\mathbb{R}^\nu$)

CI SONO DUE TEOREMI: uno per le misurabili positive (TONELLI) (che ammette il caso $+\infty$) e uno per le funzioni integrabile (FUBINI)

IN QUESTI TEOREMI SI PARTE DA UNA funzione $\boxed{f : \mathbb{R}^{N+M} \to \overline{\mathbb{R}}}$ misurabile. Convenion che $P \in \mathbb{R}^{N+M}$ si scrive $P = (x,y)$ $x \in \mathbb{R}^\nu$, $y \in \mathbb{R}^M$.

TEOREMA di TONELLI f MISURABILE, $f \geq 0$ Allora:

(a) Per quasi ogni x in $\mathbb{R}^\nu$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^M$

IN ALTRI TERMINI se $E^* = \{x \in \mathbb{R}^N : y \mapsto f(x,y) \text{ NON È MIS.}\} \Rightarrow m(E^*) = 0$

(b) Per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus E^*$ è ben definito $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$ (può valere $+\infty$)

Se la estendo a tutto $\mathbb{R}^\nu$ in maniera arbitraria, ottengo una funzione misurabile su $\mathbb{R}^\nu$

(c) Posso allora integrare in x la funzione del punto (b) e ottengo:

$$\iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(+ INFINITO È AMMESSO)

TONELLI SERVE, se $f \geq 0$, OPPURE se f è misurabile per vedere se è integrabile. Nel secondo caso il teorema si applica a $|f|$

PER ESEMPIO $\quad f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2+1} \quad (x,y) \neq (0,0)$ ← È INTEGRABILE ??

(NON IMPORTA CHE VALORE ha $f(0,0)$ – possiamo decidere $f(0,0)=0$. QUALUNQUE VALORE SI ASSEGNI A $f(0,0)$ l'integrabilità non cambia, e neppure l'integrale – se esiste)

f è misurabile in quanto continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ← MISURABILE

Per vedere se f è integrabile passo a

ANCHE questo è continuo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow$ MISURABILE

$$|f(x,y)| = \frac{|\sin(xy)|}{(x^2+y^2)^2+1} \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^2+1} =: g(x,y)$$

Se g è integrabile $\Rightarrow$ f è integrabile (IL VICEVERSA NON VALE)

USO TONELLI

$$\iint g(x,y)\,dxy = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2)^2+1} \right)} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2 \left(\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2)^2+1} \right) dx = 4 \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2)^2+1} \right) dx \quad \text{(per la parità)}$$

Tentativo: nell'integrale in y faccio un cambio di variabile

$$y = tx \Rightarrow dy = x\,dt \qquad \text{dunque}$$

$$\circledast = 4 \int_0^{+\infty} x \int_0^{+\infty} \frac{dt}{((1+t^2)^2 x^4+1}$$

(c'è un problema se $x=0$ ma $\{0\}$ è trascurabile)

NON SI RIESCE A FARE IN MODO SEMPLICE

– CI TORNIAMO QUANDO AVREMO FATTO LE COORD. POLARI