Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 34 12/12/2023

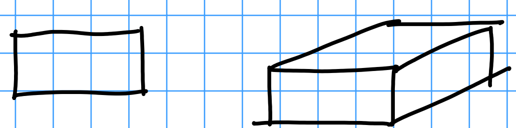
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

INTEGRALI MULTIPLI / SU $\mathbb{R}^N$

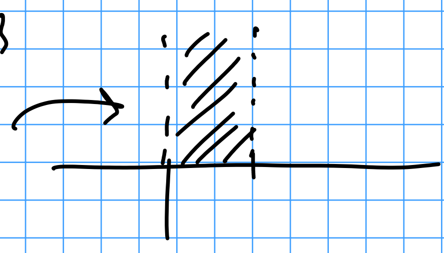
"MISURARE GLI INSIEMI"

IDEA : APPROSSIMARE CON RETTANGOLI (= prodotto di intervalli)

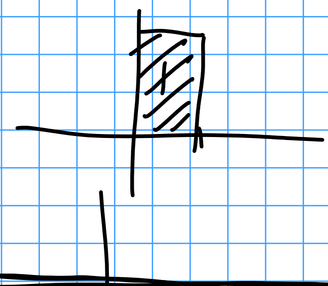


N-RETTANGOLO $R = I_1 \times \cdots \times I_N$ dove $I_1 \cdots I_N$ sono intervalli di $\mathbb{R}$ (R può anche essere illimitato — oppure essere "sottile" se uno di questi $I_i = \{a\}$

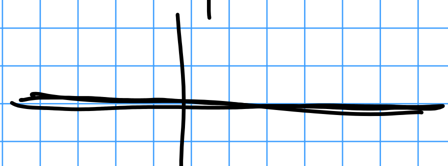
ESEMPI $[0,1] \times]0,+\infty[= R$



$[0,1] \times [0,2]$



$\mathbb{R} \times \{0\}$



Se R è un rettangolo la sua misura (N-dimensionale) è il prodotto $|R| = |I_1| \cdot |I_2| \cdot \ldots \cdot |I_N|$ (*)

dove $|I| = \sup I - \inf I$ $\left(\text{se } I = (a,b) \quad |I| = b-a \right)$

$|I|$ può essere zero (se gli estremi coincidono) e può essere $+\infty$ (se I è illimitato)

Nella formula (*) CONVENGO che $|R| = 0$ se uno dei fattori ha misura zero. $|R| = +\infty$ se tutti i fattori hanno misura > 0 e uno ha misura $+\infty$

(CONVENZIONE $0 \cdot \infty = 0$)

HO DEFINITO LA MISURA DEI RETTANGOLI.

$|R|$ (o anche $m(R)$, $m_N(R)$)

- Nota che $|R| < +\infty \Leftarrow R$ è limitato

PRENDIAMO ORA UN INSIEME $E \subset \mathbb{R}^N$

VOGLIO DEFINIRE $m(E)$ $(m_N(E))$

MISURA E INTEGRALI SECONDO RIEMANN

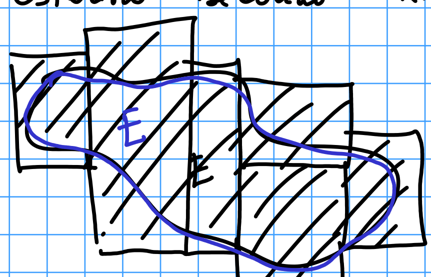
Mi restringo al caso in cui E è LIMITATO

Definisco

$\inf \{ |P''| : E \subset P'' \quad P'' \text{ plurirettangoli} \}$

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{K} |R_i| : E \subset \bigcup_{i=1}^{K} R_i \right\}$$

misura esterna secondo Riemann / Peano



. Prendo tutte le famiglie finite di rettangoli $(R_i)_{i=1}^{K}$ t.c. $E \subset \bigcup R_i$. Per ognuna di queste calcolo $\sum |R_i|$

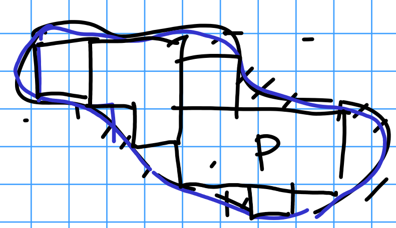
e ne faccio l'estremo inferiore

Analogamente definisco la misura interna

$$m_*(E) = \sup\{ m(P') : P' \text{ plurirettangolo con } P' \subset E \}$$

dove P plurirettangolo $\Leftrightarrow$ $P = \bigcup_{i=1}^{k} R_i$ $\quad R_i$ rettangoli disgiunti,

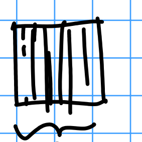
$m(P) = \sum_i |R_i|$ (si dimostra che $m(P)$ non dipende dalla famiglia di rettangoli disgiunti con cui individuo P)



Si vede che esistono insiemi limitati E per cui

$m^*(E) > m_*(E)$ (mentre vale sempre $m^*(E) \geq m_*(E)$)

Per esempio $\quad E = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1, \; x \in \mathbb{Q} \}$



se $x \in \mathbb{Q}$

$m^*(E) = 1$

$m^*(E) = 0$

<u>DEF</u>- E si dice <u>misurabile</u> secondo Riemann/Peano se $m^*(E) = m_*(E)$

Se E è misurabile scrivo $m(E)$ $(= m^*(E) = m_*(E))$

Nella classe dei misurabili valgono delle "buone proprietà"

- $m(E) \geq 0$ (se E, E_1, E_2 sono misurabili)
- $m(E_1) \leq m(E_2)$ se $E_1 \subset E_2$
- $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

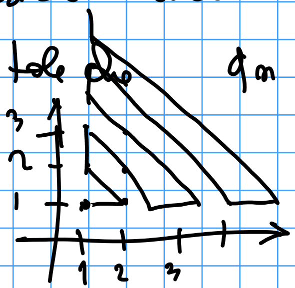
CONTA CHE E_1 E_2 misurabili

DIFETTO DI QUESTA MISURA È CHE "NON PASSA BENE AL LIMITE"

Può succedere che E_1 E_2 $\cdots$ $E_n \cdots$ sia una successione di insiemi misurabili, ma $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ non sia misurabile

INFATTI È NOTO i numeri razionali sono "numerabili" cioè esiste una successione $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n \dots$

tale che $q_n \in \mathbb{Q} \ \forall n$ e $\forall q \in \mathbb{Q} \ \exists n : q = q_n$



Per esempio $\boxed{E = \{ q \in \mathbb{Q} : 0 \le q \le 1 \} \subset \mathbb{R}}$

(i razionali tra zero e 1) sono numerabili

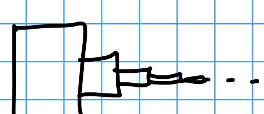
Dunque esiste $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che esaurisce tutti i razionali tra 0 e 1 $(q_n) : \mathbb{N} \to E$ ed è bigettiva. Allora posso prendere $E_n = \{q_n\}$ che è un singolo punto e si vede facilmente essere misurabile e $m(E_n) = 0$. Però

$E = \bigcup_n E_n \leftarrow$ NON È MISURABILE (Riemann)

VOGLIO UNA NOZIONE PIÙ GENERALE DI MISURA

IDEA: CONSIDERA "PLURIRETTANGOLI NUMERABILI"

$P := \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \qquad |P| = \sum_{n=1}^{\infty} |R_n|$ purché $R_i \cap R_j = \emptyset$



Questa idea è abbastanza buona. In realtà si fa in modo leggermente diverso.

$E \subset \mathbb{R}^N$ arbitrario (NON CHIEDO CHE SIA LIMITATO)

Definizione Chiamo misura esterna secondo Lebesgue di E

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |R_i| : R_i \text{ rettangoli}, \ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right\}$$

(rispetto alla def. secondo Riemann/Peano, ammetto che gli R_i siano numerabili, invece che finiti)

Proprietà

(a) $m^*(E) \in [0,+\infty]$ (b) $m^*(E_2) \geq m^*(E_1)$ se $E_1 \subset E_2$

(c) (subaddittività)

se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$

(d) se $E = R \Rightarrow m^*(R) = |R|$

Def. (insiemi misurabili)

Dico che $A \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile se

$\forall E \subset \mathbb{R}^N \quad m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$

" A spezza bene "

(secondo Lebesgue)

Indico con $\mathcal{M}$ la classe di tutti gli insiemi misurabili.

Proprietà Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di insiemi misurabili

e se $E_n \cap E_m = \phi \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_m$ è misurabile e

$$m^*\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_m)$$

DUNQUE (per esempio) $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme misurabile ($\mathcal{L}$.)

e $m^*(\mathbb{Q}) = 0$. Infatti è semplice vedere che $\{q\}$ è

misurabile e ha $m^* = 0 \Rightarrow$ tesi.

OGNI INSIEME NUMERABILE è misurabile e ha misura 0.

ELENCHIAMO LE PROPRIETÀ DEI MISURABILI e della MISURA

(secondo Lebesgue - D'ORA IN POI)

D'ORA IN POI, se $E \subset \mathcal{M}$, scrivo $m(E)$ invece di $m^*(E)$

e lo chiamo misura di E. (ESISTONO ANCHE NON MISURABILI SECONDO $\mathcal{L}$.)

PROPRIETÀ

(1) Se $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sono misurabili $\Rightarrow$

$\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_m$. sono misurabili

Se $E, F \in \mathcal{M} \Rightarrow E \setminus F \in \mathcal{M}$

(2) $\mathbb{R}^N$, ϕ, ogni rettangolo R sono misurabili
e $|R| = m(R)$ (anche nei casi ∞)

(2') Tutti gli insiemi misurabili secondo Riemann/Peano sono misurabili (L.) e le misure coincidono

(1) (continua) • Se $E_m \subset E_{m+1}$, sono misurabili

$E := \bigcup E_m$ è misurabile (già detto prima)

$m(E) = \lim_{m\to\infty} m(E_n)$

. Se $E_m \supset E_{m+1}$, sono misurabili

allora $E := \bigcap_{n=1} E_m$ è mis. . Se $m(E_1) < +\infty$

$\Rightarrow m(E) = \lim_{m\to\infty} (E_n)$

(3) Se $m^*(E) = 0 \Rightarrow E$ è misurabile
Questi insiemi con $m^*(E)$ ($= m(E)$) nulla si chiamano INSIEMI TRASCURABILI (per es. • $\mathbb{Q}$ è trascurabile in $\mathbb{R}$
• una retta è trascurabile in $\mathbb{R}^2$ ..)

INTEGRALE

Considero funzioni da $\mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

Def. (misurabilità e integrale delle funzioni)

(1) Sia $f: \mathbb{R}^N \to [0,+\infty]$. Dico che f è misurabile se $\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^N \;\; 0 \le y \le f(x)\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$

($f \geq 0$!!)

Se $f \geq 0$ è misurabile chiamo integrale di f il numero

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = m_{N+1}\left(\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^N,\ 0 \le y \le f(x)\}\right) \in [0,+\infty]$$

QUESTO INTEGRALE (caso $f \geq 0$) PUÒ ANCHE ESSERE $+\infty$

(2) $f: \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$

Dico che f è misurabile se f^+ e f^- sono misurabili.

Ricordo che $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \le 0 \end{cases}$

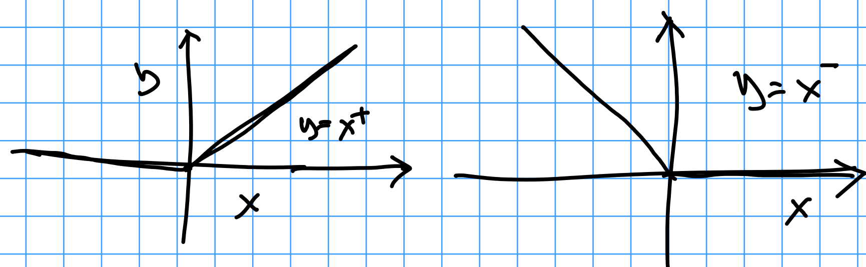
$$f^-(x) = (-f(x))^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \le 0 \end{cases}$$

ATTENZIONE

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

$x \to x^+$

$x \to x^-$



Se f è misurabile dico che è integrabile quando f^+ e f^- hanno entrambe integrale finito. In tal caso scrivo

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \underset{\in\,\mathbb{R}}{\int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx} - \underset{\in\,\mathbb{R}}{\int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx} \in \mathbb{R}$$