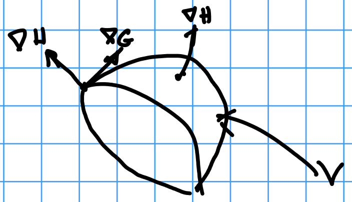
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 33 11/12/2023



email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

l'altra volta c'era solo $x \geq 0$

Esercizio $V = \{ x^2+y^2+z^2 = 1, \ x+y+z \geq 0 \}$

$f(x,y,z) = xyz$

Trovare $\max_V f$, $\min_V f$ (esistono per Weierstrass - f continua V chiuso e limitato)

(è cambiato leggermente rispetto a quello cominciato alla fine dell'ultima lezione)

CERCO I PTI STAZIONARI VINCOLATI di f su V.

Ci sono due casi da studiare, a seconda che i punti verifichino

$x+y+z=0$ / $x+y+z>0$.

Qui $V = \{ H = 0 , G \leq 0 \}$ dove $H = x^2+y^2+z^2-1$, $G = -x-y-z$

Diamo per buono che V verifica l'ipotesi N.T.

Cerco dunque i punti $P = (x,y,z)$ tali

(1) $\nabla f = \lambda \nabla H$, $G<0$ $H=0$

(2) $\nabla f = \lambda \nabla H + \mu \nabla G$ $G = H = 0$

$$(1) \quad \begin{cases} yz = \lambda 2x \\ xz = \lambda 2y \\ xy = \lambda 2z \\ x+y+z>0 , \ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

Moltiplico per $x/y/z$ le righe I/II/III e sommo

$$\underset{\uparrow}{3xyz} = 2\lambda(x^2+y^2+z^2) = \underset{\uparrow}{2\lambda}$$

lo metto nel sistema

$$\begin{cases} yz = 3x^2yz \\ xz = 3xy^2z \\ xy = 3xyz^2 \\ x^2+y^2+z^2=1, \ x+y+z>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz(1-3x^2)=0 \\ xz(1-3y^2)=0 \\ xy(1-3z^2)=0 \\ x^2+y^2+z^2=1, \ x+y+z>0 \end{cases}$$

$$\left(\lambda = \frac{3xyz}{2}\right)$$

I° rigo : $\boxed{y=0}$ / $z=0$ / $x=\pm\sqrt{3}/3$

$y=0 \Rightarrow$ III° rigo OK ; il II° rigo diventa $xz=0$

$$\Rightarrow \boxed{(0,0,1) \qquad (1,0,0)}$$

$z^2=1 \quad z>0$ $\qquad$ $x^2=1 \quad x>0$

$(\lambda=0)$

QUESTI PUNTI SONO "CRITICI LIBERI"

$(\nabla f = 0)$

$\boxed{z=0}$ ragionando come sopra trovo

$$\left((1,0,0)\right) \qquad \boxed{(0,1,0)}$$

$\boxed{x=\pm\sqrt{3}/3}$ Vediamo le altre righe :

il II° rigo diventa $z(1-3y^2)=0$ $\quad$ / $z=0$ $\quad$ \ $y=\pm\sqrt{3}/3$

guardo la terza riga

$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; $z=0$, $y=0$ IMPOSSIBILE (NON VALE $x^2+y^2+z^2=1$)

$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $z=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ TROVO

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

TUTTI I CASI POSSIBILI se $x+y+z>0$

(2) $\begin{cases} yz = \lambda 2x + \mu \\ xz = \lambda 2y + \mu \\ xy = \lambda 2z + \mu \\ x^2+y^2+z^2=1 \, , \, x+y+z=0 \end{cases}$

Come primo moltiplico per x / y / z le righe I/II/III e sommo

$$3xyz = 2\lambda \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{1} + \mu \underbrace{(x+y+z)}_{0} \Rightarrow 2\lambda = 3xyz$$

$$\begin{cases} yz = 3x^2yz + \mu \\ xz = 3xy^2z + \mu \\ xy = 3xyz^2 + \mu \\ x^2+y^2+z^2=1 \, , \, x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} yz(1-3x^2) = \mu \\ xz(1-3y^2) = \mu \\ xy(1-3z^2) = \mu \\ x^2+y^2+z^2=1 \, , \, x+y+z=0 \end{cases}$$

$\begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}xyz \\ yz(1-3x^2) = xz(1-3y^2) \\ yz(1-3x^2) = xy(1-3z^2) \\ xy(1-3z^2) = \mu \\ x^2+y^2+z^2=1 \, , \, x+y+z=0 \end{cases}$

← la posso abbandonare (riga λ)

← la posso abbandonare (riga μ)

$yz(1-3x^2) = xz(1-3y^2) \leftarrow$ $z=0$ oppure $\boxed{y(1-3x^2) = x(1-3y^2)}$ (*)

$y - 3x^2y = x - 3xy^2$

$\boxed{z=0} \Rightarrow xy=0$ ⟨ $x=0$ / $y=0$

← IMPOSSIBILI PERCHÉ da $x+y+z=0$ ottengo che sono tutti nulli e questo è incompatibile con $x^2+y^2+z^2=1$

(*) $\boxed{y - x = 3xy(x-y)}$ → $x=y$ / → $xy = -1/3$ ←

$\boxed{x=y}$ $\begin{cases} \underline{xz(1-3x^2) = x^2(1-3z^2)} \\ 2x^2+z^2=1 \, , \, 2x+z=0 \end{cases}$ ⟨

$x=0$ ($\Rightarrow y=0$, $z=0$) IMPOSSIBILE

$z - 3x^2z = x - 3xz^2$

$\underbrace{(z-x) = 3xz(x-z)}$

$z=x$ IMPOSSIBILE (sarebbero tutti zero) oppure $\boxed{3xz=-1}$

⇙

$$\begin{cases} x=y \\ 3xz=-1 \\ z=-2x \, , \, 2x^2+z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ 3xz=-1 \\ z=-2x \, , \, 6x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \pm 1/\sqrt{6} \\ y = \pm 1/\sqrt{6} \\ z = \mp 2/\sqrt{6} \end{matrix}$$

$\boxed{3xz = -1 \text{ OK}}$ TORNA

$$\boxed{\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)}$$

$\boxed{xy = -\frac{1}{3}}$ (ultimo caso)

$$\begin{cases} 3xy = -1 \\ yz(1-3x^2) = xy(1-3z^2) \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1/3x \\ -\frac{z}{3x}(1-3x^2) = \frac{-1}{3}(1-3z^2) \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \qquad x+y+z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1/3x \\ z(1-3x^2) = x(1-3z^2) \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1/3x \\ (z-x) = 3xz(x-z) \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x+y+z=0 \end{cases} \leftarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} (y = -1/3x) \quad 3xy = -1 \\ z = x \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \quad \underbrace{x+y+z} = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} (y=-1/3x) = 3xy = -1 \\ 3xz = -1 \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 3xy = -1, \quad z = x \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \quad \underline{y = -2x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3xy = -1 \\ z = y \\ x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3xy = -1, \quad z = x, \quad y = -2x \\ x^2 + 4x^2 + x^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3xy = -1, \quad z = y \quad x = -2y \\ 4y^2 + y^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \quad y = \mp\frac{2}{\sqrt{6}} \\ (3xy = -1 \text{ TORNA}) \end{cases} \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \quad x = \mp\frac{2}{\sqrt{6}} \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\boxed{\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)} \qquad \boxed{\pm\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}$$

RIASSUMENDO HO TROVATO

- $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$ (in cui $\delta = 0$)

- $$\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

su cui f vale
$$\begin{cases} \dfrac{3 \cdot \sqrt{3}}{27} = \dfrac{\sqrt{3}}{9} & \text{(nel primo punto)} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{9} & \text{(negli altri tre} \end{cases}$$

- $$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \quad \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \quad \pm\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

su cui f vale $\pm \dfrac{2}{\sqrt{6}\ 6} = \pm \dfrac{2\sqrt{6}}{36} = \pm \dfrac{\sqrt{6}}{18}$

Devo capire chi è più grande tra $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ e $\dfrac{\sqrt{6}}{18}$

$$\frac{\sqrt{3}}{9} > \frac{\sqrt{6}}{18} \iff 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \underline{\underline{\text{VERA}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\max_V f = \frac{\sqrt{3}}{9} \qquad \min_V f = -\frac{\sqrt{3}}{9}}$$