Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 32   06/12/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

DOMINIO REGOLARE A TRATTI

$D \subset \mathbb{R}^N$ tale che $\exists\, \delta > 0$ $\exists\, G_1 \cdots G_M : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1, dove $A = \{P \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(P, D) < \delta\}$, tali che

$$D = \{P \in A : G_1(P) \leq 0, \ldots, G_M(P) \leq 0\}$$

e vale

(N.T.) Se $x \in D$, se $i_1 \cdots i_k$ sono indici tra 1 e M tali che $(k \leq M)$

$$G_{i_1}(x) = \cdots = G_{i_k}(x) = 0 \qquad \text{allora}$$

$\nabla G_{i_1}(x), \ldots, \nabla G_{i_k}(x)$ sono lin. indipendenti $(\Rightarrow k \leq N)$

$$\left(\Longleftrightarrow \ \underbrace{\frac{\partial G(x)}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_k})}}_{k \times M} \text{ ha rango } k, \quad G = (G_1 \cdots G_M) \right)$$

Se D è fatto così $\Rightarrow$

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{M} \{P \in A : G_i(P) = 0,\ G_j(P) \leq 0 \quad j = 1..M,\ j \neq i\}$$

Si definisce la "frontiera regolare"

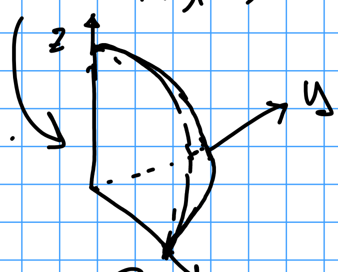
$$\partial_{reg} D := \bigcup_{i=1}^{M} \{ P \in A : \; G_i(P) = 0 , \quad G_j(P) < 0 \quad j \neq i \}$$

Nei punti $P \in \partial_{reg} D$ è ben definito

$$\hat{\nu}(P) = \frac{\nabla G_i(P)}{\| \nabla G_i(P) \|}$$ dove i è l'UNICO indice j t.c. $G_j(P) = 0$ $\left(\begin{array}{l} G_i(P) = 0 \\ G_j(P) < 0 \text{ se } i \neq j \end{array} \right)$

ESEMPIO

$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1 , \; x \geq 0 , y \geq 0 , z \geq 0 \}$



Vediamo che è un dominio reg. a tratti

Le funzioni G_i sono queste:

$G_1 = x^2+y^2+z^2-1 \qquad G_2 = -x \qquad G_3 = -y \qquad G_4 = -z$

(e chiaro che $D = \{ G_1 \leq 0 , G_2 \leq 0 , G_3 \leq 0 , G_4 \leq 0 \}$)

$N = 3$
$M = 4$

VERIFICHIAMO LA (N.T.)

$\nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(1) Caso in cui si annulla uno solo G_i

Se $G_1(x,y,z) = 0 \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = 1$. Se $\nabla G_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ IMPOSSIBILE

Noto che $\nabla G_2 , \nabla G_3 , \nabla G_4$ sono sempre $\neq \vec{0}$

(2) Caso in cui si annullano due G_i

- $G_1(P) = G_2(P) = 0 \qquad (x^2+y^2+z^2 = 1) \qquad x = 0 , \quad y^2+z^2 = 1$

devo dim. che $2 \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono lin. indip. In

effetti uno tra y o z è $\neq 0$. Se $y \neq 0$ ho che

$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ y & 0 \end{bmatrix} = -y \neq 0$. Se $z \neq 0$ ho $\det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ z & 0 \end{bmatrix} = -z \neq 0$

- Stesso discorso se $G_1 = G_3 = 0$ / $G_1 = G_4 = 0$
- $G_2 = G_3 = 0$ / $G_2 = G_4$ / $G_3 = G_4$ È facile vedere che ∇G_2, ∇G_3 e ∇G_4 sono lin indip. (dunque anche qualunque coppia è lin. indip.)

(3) Caso in cui si annullano TRE G_i

$G_1 = G_2 = G_3$ / $G_1 = G_2 = G_4$ / $G_1 = G_3 = G_4$ / $G_2 = G_3 = G_4$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

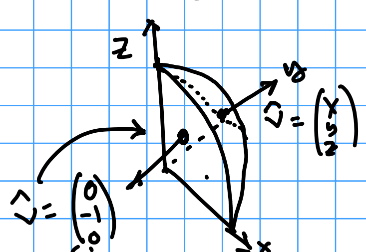
$$\left.\begin{aligned} \nabla G_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \nabla G_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla G_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{lin. indip}$$

∇G_2 ∇G_3 ∇G_4 lin. indip

(4) Non si possono mai annullare tutte le G_i

D è un dominio regolare a tratti.

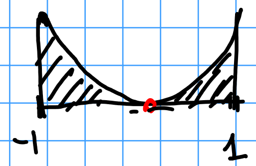
$$\partial D = \{x=0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ y^2+z^2\leq 1\} \cup \{x\geq 0,\ y=0,\ z\geq 0,\ x^2+z^2\leq 1\} \cup \{x\geq 0\ y\geq 0\ z=0,\ x^2+y^2\leq 1\} \cup \{x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2=1\}$$



$$\partial_{reg} D = \{x=0,\ y>0,\ z>0,\ y^2+z^2<1\} \cup \{x>0,\ y=0,\ z>0,\ x^2+z^2<1\} \cup \{x>0\ y>0\ z=0,\ x^2+y^2<1\} \cup \{x>0,\ y>0,\ z>0,\ x^2+y^2+z^2=1\}$$

CONTROESEMPIO $D = \{(x,y) = -1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x^2\}$

NON È REGOLARE



$G_1 = -1-x \qquad G_2 = x-1$

$G_3 = -y \qquad G_4 = y - x^2$

IL PUNTO $(0,0) \in D$. IN $(0,0)$ si annullano G_3 e G_4

$\nabla G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_4 = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_4(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

linearmente dipendenti

TEOREMA ("punti critici su D dominio regolare" e max/min)

Sia D dominio reg. e dotti e siano $G_1 \dots G_M$ delle funzioni definenti per D. Sia $f: A \to \mathbb{R}$ ($A = \{p: \text{dist}(p, A) < \delta\}$ è un "intorno di D" su cui sono definite le G_i)

Se $x_0 \in D$ e x_0 è punto di max/min rel. per f su D

ALLORA:

Se $i_1 \dots i_k$ sono (esattamente) gli indici j per cui $G_j(x_0) = 0$ allora esistono $\lambda_1 \dots \lambda_k$ numeri reali tali che

$$(*) \qquad \nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_{i_1}(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla G_{i_k}(x_0)$$

(in particolare se $G_i(x_0) < 0 \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ - IN QUESTO CASO $x_0 \in \mathring{D}$)

Def. Un punto x_0 per cui vale $(*)$ si chiama "punto critico vincolato su D"

ESEMPIO $\quad D = \{x^2+y^2+z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$

$f(x,y,z) = x + y + z$

VOGLIO $\quad \max_D f = M \qquad \min_D f = m$

(Devono esistere perché D è chiuso ed è limitato, f è continua)

Ricordiamo che $G_1 = x^2+y^2+z^2-1$ $\quad \nabla G_1 = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$G_2 = -x \quad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_3 = -y \quad \nabla G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_4 = -z \quad \nabla G_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cerchiamo i punti critici vincolati. Dobbiamo distinguere vari casi

0 Nessuno $G_i = 0$. In questo caso ho l'eq. $\nabla f(x,y,z) = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

IMPOSSIBILE

1 Uno solo $G_i = 0$ $\rightarrow$ 4 sottocasi

1A $G_1 = 0 \implies \nabla f = \lambda \nabla G_1$ che corrisponde a

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x>0, y>0, z>0 \end{cases} \implies x = y = z \left(= \frac{1}{2\lambda}\right) \qquad x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \quad (f = \sqrt{3})$$

1B $G_2 = 0$ cioè

$x = 0 \qquad \nabla f = \nabla G_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cioè

$$\begin{cases} 1 = -\lambda \\ 1 = 0 \\ 1 = 0 \\ x=0 \quad y>0 \quad z>0 \quad x^2+y^2+z^2<1 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

1C e 1D sono analoghi (i casi con $y=0$ / $z=0$)

2 Caso con due $G_i = 0$. Ho 6 sottocasi

2A $G_1 = 0 \quad G_2 = 0 \qquad x=0 \quad y^2+z^2 = 1 \quad y>0 \quad z>0$

$$\nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2$$

$$\begin{cases} 1 = \cancel{2\lambda x} + \mu(-1) \\ 1 = 2\lambda y + \cancel{\mu(0)} \\ 1 = 2\lambda z + \cancel{\mu(0)} \\ x=0, y>0, z>0 \\ y^2+z^2 = 1 \end{cases} \iff x=0 \quad y = z = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\left(0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

2B e 2C (quelli analoghi) $\rightsquigarrow$ $\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ $\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}$

2D $\quad G_2 = G_3 = 0 \quad G_1 < 0 \quad G_4 < 0$

$$\nabla f = \lambda\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = -\lambda \\ 1 = -\mu \\ 1 = 0 \leftarrow \text{IMPOSSIBILE} \\ x=0 \quad y=0 \quad z>0 \\ z^2 < 1 \end{cases}$$

Analogamente trovo che non ci sono pti critici con $x=z=0$ / $y=z=0$

3 Tre condizioni di " = ". (4 sottocasi)

$G_1 = G_2 = G_3 \qquad x=y=0 \quad z=1$ $\quad \boxed{(0,0,1)}$

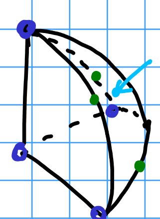
È inutile fare calcoli. Dato che ∇G_1 ∇G_2 ∇G_3 son lin. indip esistono di sicuro $\lambda\ \mu\ \nu$ tali che

$$\nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2 + \nu \nabla G_3 \qquad (\text{Siamo in } \mathbb{R}^3)$$

Analogamente trovo $\boxed{\underset{G_1=G_3=G_4=0}{(1,0,0)}, \underset{G_1=G_2=G_4=0}{(0,1,0)}, \text{ e } \underset{G_2=G_3=G_4=0}{(0,0,0)}}$

GLI "SPIGOLI" SONO CRITICI QUALUNQUE SIA f

ABBIAMO TROVATO 8 punti critici



Calcolo f su ognuno di questi punti.

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$f\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$f(0,0,0)=0$

$f(1,0,0)=f(0,1,1)=f(0,0,1)=1$

$\Rightarrow \max_D f=\sqrt{3} \qquad \min_D f=0$

C'è ancora un caso più generale.

CONSIDERO A aperto di $\mathbb{R}^N$ $\quad V\subset A$
tale che esistano $G_1\dots G_M,\ H_1\dots H_L : A\to\mathbb{R}$ di classe C^1
tali che

$$V=\{X\in A:\ G_1(x)\le 0\dots G_M(x)\le 0,\ H_1(x)=0=\dots=H_L(x)\}$$

(se non ci sono H ho il caso precedente)

Le G_i sono dei "vincoli di disuguaglianza" le H_j sono "vincoli di uguaglianza"

(per es. $\quad V=\{x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0\}$)

e vale

(N.T) Se $X\in V$, se $i_1\dots i_K$ sono indici da 1 a M tali che
$G_{i_1}(x)=\dots=G_{i_K}(x)=0$
allora $\nabla G_{i_1}(x)\dots\nabla G_{i_K}(x)\ \underbrace{\nabla H_1(x)\dots\nabla H_L(x)}_{\text{tutte le } H_i}$ sono lin. indip

Se inoltre $f: A\to\mathbb{R}$, di classe C^1, e $x_0\in V$ è punto di max/min rel per f su V, allora esistono $\lambda_1\dots\lambda_M,\ \mu_1\dots\mu_L$ in $\mathbb{R}$ per cui

$$\nabla f(x)=\lambda_1\nabla G_1(x)+\dots+\lambda_M\nabla G_M(x)+\mu_1\nabla H_1(x)+\dots+\mu_L\nabla G_L(x)$$

e $\lambda_i=0$ se $G_i(x)<0$

ESEMPIO $\quad V=\{x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0\}\qquad (A=\mathbb{R}^2)$

$f(x,y)=xyz$

Cerco $\max_V f$, $\min_V f$.

Abbiamo che $V = \{ H(x,y,z)=0 , G(x,y,z) \le 0 \}$ dove

$$H = x^2+y^2+z^2 \qquad G = -x$$

$$\nabla H = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \nabla G = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

I PUNTI CRITICI SONO DATI DAI DUE CASI

$\boxed{1}$ $G<0$ $(x>0)$ (Ho scambiato i nomi dei moltiplicatori...)

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x \\ xz = \lambda 2y \\ xy = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2=1 , \ x>0 \end{cases}$$

MOLTIPLICO per x / y / z e sommo

$3xyz = 2\lambda$. Lo rimetto nel sistema

$$\begin{cases} yz = 3x^2yz \\ xz = 3xy^2z \\ xy = 3xyz^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 , x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} yz = 3x^2yz \\ z = 3y^2z \\ y = 3xz^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 , x>0 \end{cases} \quad \dots$$

$\boxed{2}$ $x=0$ Compare un secondo moltiplicatore

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x - \mu \\ xz = \lambda 2y \\ xy = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2=1 , \ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} yz = -\mu \\ 0 = 2\lambda y \\ 0 = 2\lambda z \\ y^2+z^2=1 \quad x=0 \end{cases}$$

← SONO TUTTI CRITICI (basta $\lambda=0$)

FINIAMO LA PROSSIMA VOLTA