Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 31 05/12/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCIZIO

$$f(x,y,z) = xyz$$

$$V = \{ \underbrace{x^2+y^2+z^2-1=0}_{G_1} , \underbrace{x+y+z=0}_{G_2} \} = \{ G_1(x,y,z)=0, G_2(x,y,z)=0 \}$$

$$G = (G_1, G_2) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

Voglio trovare max/min di f su V.

A rigore, se voglio usare i moltiplicatori, devo verificare (N.T) e cioè

$$\text{rang}\left(J_G(x,y,z)\right) = 2 \qquad \forall (x,y,z) \in V$$

In effetti:

$$J_G(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dico che almeno uno tra $\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ha determinante $\neq 0$ per le $(x,y,z) \in V$.

Se non fosse vero avrei $x-y=0$, $x-z=0$, $y-z=0$

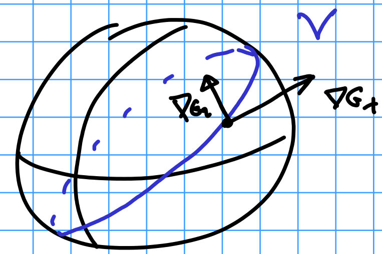
$\Leftrightarrow$ $x=y=z$. Ma allora $x^2+x^2+x^2=1$, $x+x+x=0$

IMPOSSIBILE.

DUNQUE, IN OGNI $P=(x,y,z)\in V$ i due gradienti

$$\boxed{\nabla G_1(P) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad e \quad \nabla G_2(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

sono linearmente indipendenti (e le loro combinazioni lineari descrivono $N_V(P)$



È chiaro f è C^1 e $\boxed{\nabla f(P) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}}$

Cerco i pti critici (VINCOLATI A V): devo risolvere

$$(Sys)\begin{cases} yz = \lambda 2x + \mu \cdot 1 \\ xz = \lambda 2y + \mu \cdot 1 \\ xy = \lambda 2z + \mu \cdot 1 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Se moltiplico per $x/y/z$ le righe 1/2/3 e poi sommo

$$3xyz = 2\lambda$$

DUNQUE POSSO RISCRIVERE

$$\begin{cases} yz - 3x^2yz = \mu \\ xz - 3xy^2z = \mu \\ xy - 3xyz^2 = \mu \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{matrix} yz - 3x^2yz = xz - 3xy^2z & (I^\circ - II^\circ) \\ yz - 3x^2yz = xy - 3xyz^2 & (I - III) \end{matrix}}_{??}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} z(y-x) = 3xyz(x-y) \\ y(z-x) = 3xyz(x-z) \end{matrix}$$

ci sono vari casi

Per la prima riga $z=0$ oppure $y=x$ oppure $3xy=-1$

$\boxed{\text{Se } z=0}$ la seconda riga diventa

$-xy=0$

dunque ho $(0,y,0)$ oppure $(x,0,0)$

Se aggiungo la condizione $x+y+z=0 \Rightarrow (0,0,0)$

ma questo è impossibile se $x^2+y^2+z^2=1$

$z=0 \rightarrow$ NESSUNA SOL.

$\boxed{y=x}$ Inserisco nella seconda riga:

$x(z-x) = 3 \cdot x^2 z(x-z)$

$x=0$ (Ma questo $\Rightarrow y=0 \Rightarrow z=$ come prima IMPOSSIBILE)

$z=x$

$-1 = 3xz$

Mettiamo $z=x=y$ IMPOSSIBILE perché $x+y+z=0 \Rightarrow$

$x+x+x=0 \Rightarrow x=0$ INCOMPATIBILE CON $x^2+y^2+z^2=1$

RIMANE $3xz=-1$ $\quad z=-\frac{1}{3x}$ $\quad (x\neq 0)$

$y=x$ $\quad z=-\frac{1}{3x}$ aggiungo $x+y+z=0 \Rightarrow 2x-\frac{1}{3x}=0$

$6x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\quad z=\mp\frac{\sqrt{6}}{3}$

CONTROLLIAMO SE $x^2+y^2+z^2=1$. In effetti

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{6}{9} = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{4}{6} = 1$ TORNA

Ho TROVATO $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\boxed{3xy=-1}$ La metto nella seconda riga: $y=-\frac{1}{3x}$

$$-\frac{1}{3x}(z-x) = -z(x-z) \quad \begin{cases} x=z \\ z=-\frac{1}{3x} \end{cases}$$

Caso $\boxed{x=z}$ $\quad y=\frac{-1}{3x}$, stessi calcoli di prima $\quad \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}$

CASO $\boxed{-\frac{1}{3x}=z}$, $\quad y=-\frac{1}{3x} \quad \boxed{z=y=\frac{-1}{3x}}$

Se rifaccio i conti del secondo caso trovo

$$\pm\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Se nella dell'insieme ho trovato 6 soluzioni

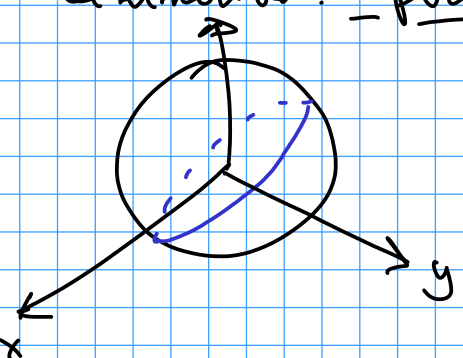
$$\boxed{\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad \pm\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)}$$

Quanto fa f in questi punti

$$\pm\frac{6\sqrt{6}}{6\cdot 6\cdot 3} = \pm\frac{\sqrt{6}}{18}$$ (+ o meno a seconda di come si combinano i segni)

$$\max_V f = \frac{\sqrt{6}}{18} \qquad \min_V f = -\frac{\sqrt{6}}{18}$$

Metodo alternativo: parametrizzare V



Cerco due vettori $\vec{e}_1$ $\vec{e}_2$ nel piano $x+y+z$, due di loro ortogonali.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} x+y+z=0 \\ \alpha y - \alpha z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=z \end{cases} \qquad \begin{matrix} y=z=\beta \\ z=-2\beta \end{matrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2\beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

LI VOGLIO ANCHE DI NORMA 1

$$(4+1+1)\beta^2 = 1$$

$$\boxed{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}}$$

Posso prendere $\boxed{\gamma(t) = \cos(t)\,\vec{e}_1 + \sin(t)\,\vec{e}_2}$

$(\gamma(t) \in \{x+y+z=0\}$ e $\|\gamma(t)\|^2 = 1$ perché :

$$\|\gamma(t)\|^2 = \cos^2(t)\underbrace{\|\vec{e}_1\|^2}_{1} + 2\cos(t)\sin(t)\underbrace{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2}_{=0} + \sin^2(t)\underbrace{\|\vec{e}_2\|^2}_{1} =$$

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$\gamma(t)$ DESCRIVE V se $t \in [0, 2\pi]$

$$f(\gamma(t)) = xyz = \underbrace{-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin(t)}_{x}\underbrace{\left(\cos(t)\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(t)\frac{\sqrt{6}}{6}\right)}_{y}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) + \frac{\sqrt{6}}{6}\sin(t)\right) =$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin(t)\left(\frac{1}{6}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\cos^2(t)\right) =: \varphi(t)$$

VOGLIO max / min φ su $[0, 2\pi]$. Calcolo $\varphi'(t)$ e lo metto uguale a zero

$$\varphi'(t) = -\frac{\sqrt{6}}{3}\cos(t)\left(\frac{1}{6}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\cos^2(t)\right) +$$

$$\underbrace{-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin(t)\left(\frac{1}{3}\sin(t)\cos(t) + \cos(t)\sin(t)\right)}_{-\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{4}{3}\sin^2(t)\cos(t)} =$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{3}\cos(t)\left(\frac{1}{6}\sin^2(t)-\frac{1}{2}\cos^2(t)+\frac{4}{3}\sin^2(t)\right)$$

Se eguaglio a zero trovo (due casi)

(1) $\cos(t)=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ $\left(\Rightarrow \sin(t)=1 \,/\, -1\right)$

$$P_{1,2}=\pm e_2 = \pm\begin{pmatrix} -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/2 \end{pmatrix}$$

(2) $\frac{3}{2}\sin^2(t)-\frac{1}{2}\left(1-\sin^2(t)\right)=0$

$2\sin^2(t)=\frac{1}{2}$ $\quad \sin^2(t)=\frac{1}{4}$ $\quad \sin(t)=\pm 1/2$

(t ... si trovano)

se $\sin(t)=\frac{1}{2}$ $\quad \cos(t)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ quattro punti

se $\sin(t)=-\frac{1}{2}$ $\quad \cos(t)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\pm\frac{1}{2}e_1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ (tutte 4 le combinazioni di + e −)

(facendo i conti dovrebbero tornare quelli di prima)

Def. (DOMINIO REGOLARE / REGOLARE A TRATTI)

A aperto di $\mathbb{R}^N$ $\quad D \subset A$

Dico che D è un dominio regolare in A se esiste una $G: A \to \mathbb{R}$ tale che

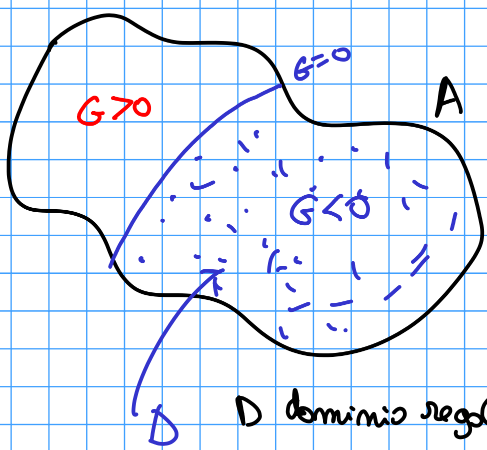
$$D=\{x\in A:\ G(x)\le 0\}$$

e vale (N.T.) $\nabla G(x)\neq 0 \quad \forall x \in \{G(x)=0\}$.

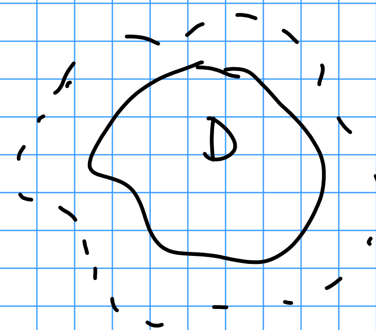
Se $D\subset\mathbb{R}^N$, dico che D è un dominio regolare se $\exists\, \delta > 0$ tale che D è un dominio regolare in

$$D_\delta = \{ x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, D) < \delta \}$$

(dove $\operatorname{dist}(x, D) = \inf \{ \|x - y\| : y \in D \}$)



D dominio regolare in A



D dominio regolare

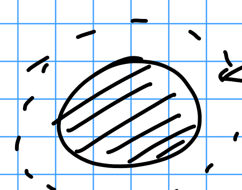
Per esempio D è regolare se c'è una $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ per cui

$D = \{ G \leq 0 \}$ + (N.T.)

(UNA DISUGUAGLIANZA)

Per esempio $D = \{ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \}$ ← $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$

G è definita su tutto $\mathbb{R}^3$ ← BASTEREBBE CHE FOSSE DEFINITA in un $A = \{ x^2 + y^2 + z^2 < R^2 + \delta \}$



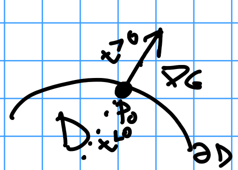
qui serve che sia definita G

FATTI Se D è un dominio regolare ⇒

$\partial D = \{ P \in D : G(P) = 0 \}$ ← è un vincolo di codimensione 1

INOLTRE Se $P \in \partial D$ il gradiente $\nabla G(P)$ $(\neq 0)$

individua la retta normale a ∂D e "punta verso l'esterno di D"



Infatti se prendo la curva

$\gamma(t) = P + t\nabla G(P)$. Questa curva vale P quando $t=0$

Inoltre, se $\varphi(t) = G(\gamma(t))$, ho $\varphi(0) = 0$ e

$\varphi'(t) = \nabla G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

$\varphi'(0) = \nabla G(P) \nabla G(P) = \|\nabla G(P)\|^2 > 0$

$\Rightarrow$ se $t < 0$ piccolo $G(\gamma(t)) < 0 \Rightarrow \gamma(t)$ dentro D

se $t > 0$ piccolo $G(\gamma(t)) > 0 \Rightarrow \gamma(t)$ fuori D

DIRÒ CHE $\hat{\nu}(P) := \dfrac{\nabla G(P)}{\|\nabla G(P)\|}$ è la

"normale unitaria uscente da D" dove $P \in \partial D$

$\simeq$ IN TUTTI I PUNTI P di ∂D è definito $\hat{\nu}(P) =$

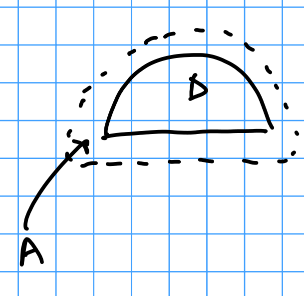
(LA G si chiama "funzione definente" D e
se cambio G, queste nozioni NON CAMBIANO)

Def. (CONTINUAZIONE)

Dico che D è un dominio regolare a tratti se

$\exists\, \delta > 0$ ed esistono $G_1 \dots G_M : A \to \mathbb{R}$

dove $A = \{ P : \operatorname{dist}(P, D) < \delta \}$ tali che



$D = \{ P : G_1(P) \leq 0, \dots, G_M(P) \leq 0 \}$

(M disuguaglianze) e

Se in P ci sono K eguaglianze $K \leq M$, cioè se

(N.T.) $G_{i_1}(P) = G_{i_2}(P) = \dots = G_{i_K}(P) = 0 \qquad i_1 \dots i_K \in \{1 \dots M\}$

$\Rightarrow \quad \nabla G_{i_1}(P), \dots, \nabla G_{i_K}(P)$ sono lin. indip.

(solo i gradienti delle G_i che si annullano in P)

(Per esempio $D = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x+y+z \geq 0\}$

(DOMANI FACCIAMO LA VERIFICA CHE D è REGOLARE A TRATTI))

Se D è fatto così:

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{M} \{P : G_i(P) = 0,\ G_j(P) \leq 0 \text{ se } j \neq i\}$$

IN ∂D posso individuare "la parte regolare"

$$\partial_{reg} D := \bigcup_{i=1}^{M} \{P\ G_i(P) = 0,\ G_j(P) < 0 \text{ se } j \neq i\} \quad \left(\text{è una Def.}\right)$$

(una SOLA G_i si annulla)

Se $P \in \partial_{reg} D$ è ben definita

$$\hat{\nu}(P) = \frac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i(P)\|}$$

dove i è L'UNICO INDICE j per cui $G_j(P) = 0$