Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 30 04/12/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

TEOREMA (MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE) A aperto di $\mathbb{R}$

$V \subset A$ vincolo regolare di codimensione $M < N$, cioè

$\exists\ G: A \to \mathbb{R}^M$ di classe C^1 tale che (G. funz. definente)

$$V = \{ x \in A : G(x) = 0 \}$$

(N.T.) Se $x \in V$ rango $(J_G(x)) = M$ $\left(\Leftrightarrow \nabla G_1(x) \cdots \nabla G_M(x) \text{ lin. ind.} \right)$

(N.T.) sta per NON TANGENZA – (TRASVERSALITÀ)

$f: A \to \mathbb{R}$ di classe C^1; $x_0 \in V$ punto di max/min relativo per f su V.

ALLORA

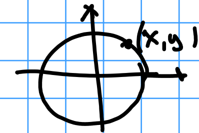
esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \dots + \lambda_M \nabla G_M(x_0)$

(cioè $\nabla f(x_0) \in N_V(x_0) \leftarrow$ spazio normale a V in x_0)

ESEMPIO Considero $f(x,y) = xy$ su $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$

S è limitato e chiuso – f è continua. Dunque esistono

$M := \max_{(x,y)\in S} xy \qquad m = \min_{(x,y)\in S} xy$

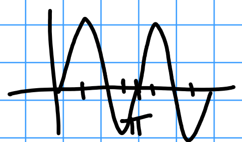


(1) Potrei usare un "trucco" e descrivere i punti di S come sostegno di

$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad (x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ 0 \le t \le 2\pi)$

Allora $M = \max_{0\le\theta\le 2\pi} f(\gamma(t)) = \max_{0\le\theta\le 2\pi} \cos(t)\sin(t) = \frac{1}{2}\max_{0\le\theta\le 2\pi} \sin(2t)$

$= \frac{1}{2}$



(posso derivare in t:

$\frac{1}{2}\cos(2t)\cdot 2 = 0 \iff \cos(2t) = \frac{\pi}{2} + \pi k \iff t_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

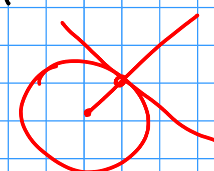
$\frac{1}{2}\sin(2t_k) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow M = \frac{1}{2} \qquad m = -\frac{1}{2}$

(2) In alternativa posso usare i moltiplicatori:

$f(x,y) = xy$ mentre $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

Qui $A = \mathbb{R}^2$ $\quad M = 1$ (S è di codimensione 1)



$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

I "punti critici vincolati" (di f su S) sono le "sol. di"

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla G(x,y)$ (incognite sono (x,y) e λ), cioè
$(x,y)\in S$

$$\begin{cases} y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Moltiplico la I° rigo per x
" " " II° " per y e sommo:

$xy = 2\lambda x^2$
$xy = 2\lambda y^2$

$2xy = 2\lambda(x^2+y^2) = 2\lambda$

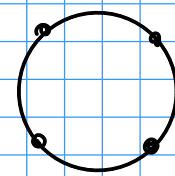
$\Rightarrow xy = \lambda$ ← lo rimetto nel sistema

$$\begin{cases} y = 2x^2 y \leftarrow \left\langle \begin{array}{l} y=0 \\ 1 = 2x^2 \end{array}\right. \\ x = 2xy^2 \leftarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ 1 = 2y^2 \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Noto che $y=0 \Rightarrow x=0$ IMPOSSIBILE

DUNQUE posso semplificare y nella I° rigo e x nella II° rigo:

$$\begin{cases} 1 = 2x^2 \\ 1 = 2y^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{matrix} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$



Se calcolo f in questi punti vedo che

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \leftarrow \text{MAX}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \leftarrow \text{MIN}$$

ESEMPIO (IN $\mathbb{R}^3$) Considero $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$

che è un vincolo di cod. 1, avente come funz. definente

$$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$

$$\left(\text{infatti } \nabla G(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0 \ \forall (x,y,z) \in S\right)$$

Consideriamo $f(x,y,z) = ax+by+cz$ $\quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$

(una funzione lineare - potrei vedere $f(x,y,z)$ come $\vec{w} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\quad (\vec{w} \neq \vec{0})$).

Abbiamo $\nabla f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\quad \nabla G = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ DUNQUE

devo cercare le soluzioni di. (STO CERCANDO $\underbrace{\max_S f \,/\, \min_S f}_{\text{ESISTONO PER WIERSTRASS}}$)

$$\begin{cases} a = 2\lambda x \\ b = 2\lambda y \\ c = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

NOTO CHE $\lambda \neq 0$ altrimenti $a=b=c=0$. DUNQUE posso dividere per λ e ottenere

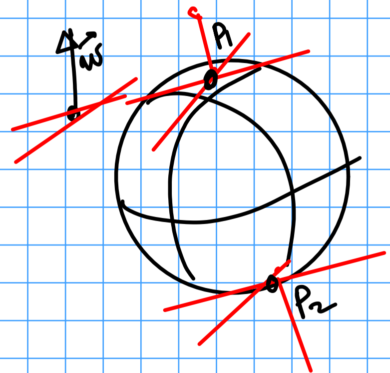
$$\begin{cases} x = \frac{a}{2\lambda} \\ y = \frac{b}{2\lambda} \\ z = \frac{c}{2\lambda} \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

Ricavo λ

$$\frac{a^2}{4\lambda^2} + \frac{b^2}{4\lambda^2} + \frac{c^2}{4\lambda^2} = 1$$

$$2\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow \quad P_{1,2} = \pm\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$



UNO È PTO DI MAX, L'ALTRO È PTO DI MIN

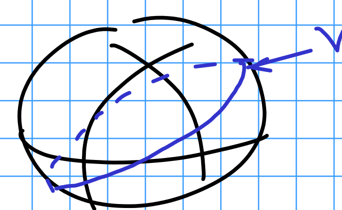
$$\max_S f = \frac{a^2}{\sqrt{\ \ }} + \frac{b^2}{\sqrt{\ \ }} + \frac{c^2}{\sqrt{\ \ }} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\min_S f = \dots = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

ESEMPIO

$$V = \{\underbrace{x^2+y^2+z^2-1=0}_{G_1},\ \underbrace{x+y+z=0}_{G_2}\}$$

(INTERSEZIONE TRA la sfera e un piano)



Cerco max / min di $f(x,y,z) = xyz$ su V

I pti critici vincolati sono gli (x,y,z) : $\exists\ \lambda, \mu$ per cui

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla G_1(x,y,z) + \mu \nabla G_2(x,y,z)$$

CIOÈ

$$(SIS)\begin{cases} yz = \lambda 2x + \mu \\ xz = \lambda 2y + \mu \\ xy = \lambda 2z + \mu \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \quad x+y+z = 0 \end{cases}$$

Moltiplico per x la I°, per y la II°, per z la III° e sommo:

$$\begin{aligned} xyz &= 2\lambda x^2 + \mu x \\ xyz &= 2\lambda y^2 + \mu y \\ xyz &= 2\lambda z^2 + \mu z \\ \hline 3xyz &= 2\lambda \qquad\quad 0 \end{aligned}$$

DUNQUE $2\lambda = 3xyz$

CONTINUIAMO DOMANI