Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 29   29/11/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

A aperto di $\mathbb{R}^N$ $G: A \to \mathbb{R}^M$ con $N > M$, $G \in C^1(A)$

(ieri c'era $N+M$ al posto di N). Si considera

$$V = \{x \in A : G(x) = 0\}$$

Def. Dico che V è "VINCOLO DI CODIMENSIONE M in A"
(OPPURE DI "DIMENSIONE $N-M$")

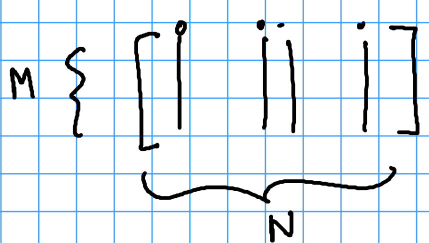
(N.T.) $J_G(x)$ ha rango M $\forall x \in V$

(N.T. → NON TRASVERSALITÀ)

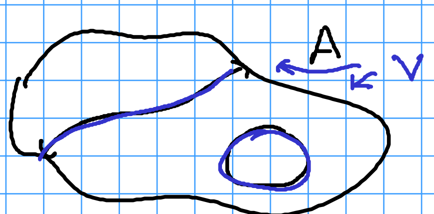
(Ricorda che il rango di una matrice B è l'ordine della massima sottomatrice quadrata invertibile contenuta in B)

J_G è una matrice $M \times N$ $(N > M)$

L'ipotesi (N.T.) dice che $J_G(x)$ ha "rango massimo" e cioè che



esistono M colonne di $J_G(x)$ linearmente indipendenti $\iff$ le M righe di $J_G(x)$ sono lin. indip.



OSS. Nel caso di $M=1$ ho un vincolo di codimensione 1 - dimensione $N-1$

OSS. Si può sempre pensare a V come intersezione di M vincoli di codimensione 1 : infatti se $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ vuol dire che $g = (g_1 \dots g_M)$ e dunque

$$V = \{ g = 0_M \} = \{ g_1 = 0, \dots, g_M = 0 \} = \{ g_1 = 0 \} \cap \dots \cap \{ g_M = 0 \}$$

(l'ipotesi (N.T.) dice che questi M vincoli "si intersecano trasversalmente"

$\Leftrightarrow$ "non sono tangenti")

Teorema Se V è come sopra, $x_0 \in V$ allora

$\vec{v}$ in $\mathbb{R}^N$ è tangente a V in $x_0 \iff J_G(x_0)\vec{v} = 0_M$

$$0_M = (\underbrace{0, \dots, 0}_{M})$$

(se G è scalare $J_G(x_0)\vec{v} = \nabla G(x_0) \cdot \vec{v}$)

Dim. $\Rightarrow$ Suppongo che $\vec{v}$ sia tangente a V in x_0. Allora esiste $\underbrace{\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V}_{\exists}$ con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = \vec{v}$.

$$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad G(\gamma(t)) = 0_M \Rightarrow \frac{d}{dt} G(\gamma(t)) = 0_M \qquad J_G(\gamma(t))\, \gamma'(t) = 0_M$$

Metto $t=0$ trovo $J_G(x_0)\vec{v} = 0_M$.

$\Leftarrow$ Supponiamo che $\vec{v}$ sia tale che $J_G(x_0)\vec{v}$ $\left(\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(J_G(x_0)) \right)$

Voglio trovare una γ con $\gamma(0) = x_0$ $\gamma'(0) = \vec{v}$. Devo usare (N.T.)

Per semplicità suppongo che $\dfrac{\partial G}{\partial (x_{N-M+1} \dots x_N)}$ invertibile

$$J_G(x) = \Big[\underbrace{\quad}_{x'} \Big| \underbrace{\frac{\partial G}{\partial x''}}_{x''} \Big] \Big\} M$$

$\leftarrow$ SCRIVO $x = (x', x'')$

$x' \in \mathbb{R}^{N-M}$ $x'' \in \mathbb{R}^M$

$x_0 = (x_0', x_0'')$

Per il teorema del DINI so che

$\exists$ W in $\mathbb{R}^{N-M}$, intorno di x_0' ed $\exists$ $f: W \to \mathbb{R}^M$ t.c.

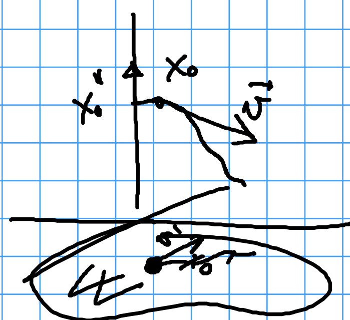
$\exists\, \rho > 0$

$V \cap B(x_0,\rho) = \{(x', f(x')) : x' \in W\}$ Anche $\vec{v}$ lo scrivo $(\vec{v}', \vec{v}'')$

$$\underline{J_G(x_0)\vec{v} = 0} \iff \frac{\partial G(x_0)}{\partial x'}\vec{v}' + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial x''}}_{\text{INVERTIBILE}}\vec{v}'' = 0 \iff$$

$$\iff \boxed{\vec{v}'' = -\frac{\partial G(x_0)}{\partial x''}^{-1}\frac{\partial G}{\partial x'}(x)\,\vec{v}'} \leftarrow$$

Costruisco una curva in W $\quad \underline{\gamma(t) = \left(x_0' + t\vec{v}',\ f(x_0' + t\vec{v}')\right)}$



è chiaro che $\gamma(t) \in V \quad \forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$

($\varepsilon > 0$ è scelto in modo che $x_0' + t\vec{v}' \in W$)

γ è una curva in V. $\gamma(0) = (x_0', f(x_0')) = (x_0', x_0'') = x_0$

$\gamma'(t) = \left(\vec{v}',\ J_f(x_0' + t\vec{v}')\vec{v}'\right)$

$\gamma'(0) = \left(\vec{v}',\ J_f(x_0')\vec{v}'\right)$

Sappiamo, per il Dini che $J_f(x_0') = -\left(\frac{\partial G(x_0)}{\partial x''}\right)^{-1}\frac{\partial G(x_0)}{\partial x'}$

$\Rightarrow \quad J_f(x_0')\vec{v} = -\left(\frac{\partial G(x)}{\partial x''}\right)^{-1}\frac{\partial G}{\partial x}(x_0)\vec{v}' = \vec{v}''$

IN DEFINITIVA $\quad \gamma(0) = x_0, \quad \gamma'(0) = (\vec{v}', \vec{v}'') = \vec{v}$

<u>Def.</u> Indico

$T_V(x_0) = \{\vec{v} \text{ tangenti a } V \text{ in } x_0\}$ spazio tangente a V in x_0

$N_V(x_0) = T_V(x_0)^{\perp}$ spazio normale a V in x_0

$\dim(N_V(x_0)) = M \qquad \dim(T_V(x_0)) = N - M$

LEMMA ALGEBRICO Sia A una matrice $M \times N$ $N > M$

Allora ($A: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$) ($A^T: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$)

$$(\ker A)^\perp = \mathrm{Img}(A^T)$$

$\mathrm{IMG}(A) =$ IMMAGINE DI $A = A(\mathbb{R}^N)$

Dim. (1) $\mathrm{Img}(A^T) \subset (\ker A)^\perp$. Se $\vec{w} \in \mathrm{Img}(A^T)$ vuol dire

$\exists\ \vec{v} \in \mathbb{R}^M$ tale che $\vec{w} = A^T \vec{v}$. Prendiamo $\vec{u} \in \ker A$

e facciamo $\vec{w} \cdot \vec{u} = A^T\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot A\vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

Dunque $\vec{w} \in (\ker A)^\perp$

(2) $(\ker A)^\perp \subset \mathrm{Img}(A^T)$. Prendo $\vec{w} \in (\ker A)^\perp$

Definisco $\varphi(\vec{v}) = \| A^T\vec{v} - \vec{w} \|^2$ al variare di $\vec{v} \in \mathbb{R}^M$

Si ha $\varphi(\vec{v}) = \|A^T\vec{v}\|^2 - 2A^T\vec{v} \cdot \vec{w} + \|w\|^2 =$

$$= \underbrace{AA^T\vec{v} \cdot \vec{v}}_{\text{forma quadratica } \geq 0} - \underbrace{2A^T\vec{v} \cdot \vec{w}}_{-2\vec{v} \cdot A\vec{w}} + \|w\|^2$$

$A^T\vec{v} \cdot A^T\vec{v}$

$AA^T\vec{v} \cdot \vec{u} = A^T\vec{v}\, A^T\vec{u} = \vec{v}\, AA^T\vec{u}$

Dato che AA^T è simmetrica posso scrivere $\mathbb{R}^M = X_0 \oplus X'$

dove $X_0 = \ker AA^T$ e $X' = X_0^\perp$; in questo modo

$$AA^T\vec{v} = AA^T(\vec{v}_0 + \vec{v}') = AA^T\vec{v}' \geq \nu \|\vec{v}'\|^2$$
con $\nu > 0$

Se inserisco questa info nella $\varphi(\vec{v})$

$$\boxed{\varphi(\vec{v}) = AA^T\vec{v}'\vec{v}' - 2A^T\vec{v}' \cdot \vec{w} + \|w\|^2} \quad \left(\varphi(v) = \varphi(v') \right)$$

$$A^T\vec{v} \cdot \vec{w} = A^T(v_0 + v') \cdot \vec{w} = \underbrace{\underbrace{A^T v_0}_{\in \ker A} \cdot \vec{w}}_{=0 \text{ perché abbiamo preso } \vec{w} \in \ker A^\perp} + A^T\vec{v}' \cdot \vec{w}$$

Dato che $\underbrace{AA^T\vec{v}'\vec{v}' \geq \nu\|v'\|^2}$, $\forall\, v' \in X' \Rightarrow \lim_{\|v'\| \to \infty} \varphi(v') = +\infty$

e dato che all'infinito vince il termine quadratico $\Rightarrow$

φ ha minimo su X'. Dunque esiste $\vec{v}^* \in X'$ ($\subset \mathbb{R}^M$)

tale che $\varphi(\vec{v}) \geq \varphi(\vec{v}^*) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\nabla\varphi(\vec{v}^*) = 0$$

$$\varphi(\vec{v}) = \| A^T\vec{v} - \vec{w} \|^2 \Rightarrow \nabla\varphi(\vec{v}) =$$

Ne segue che $\qquad = 2AA^T\vec{v} - 2A\vec{w}$

$$AA^\perp\vec{v}^* = A\vec{w} \Leftrightarrow A(A^\perp\vec{v}^* - \vec{w}) = 0$$

$$\Rightarrow A^\perp\vec{v}^* - \vec{w} \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow$$

$$(A^\perp\vec{v}^* - \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$$

da qui con una rigo di passaggi ricavo

$$\varphi(\vec{v}^*) = 0$$

$$\varphi(\vec{v}^*) = \| A^T\vec{v}^* - \vec{w} \|^2 = (A^T\vec{v}^* - \vec{w})(A^T\vec{v}^* - \vec{w}) =$$

$$(A^\perp\vec{v}^* - \vec{w})A^T\vec{v}^* + 0 = \underset{(\text{perché } \nabla\varphi = 0)}{AA^T\vec{v}^* - A\vec{w}} = 0$$

Allo fine trovo $\varphi(\vec{v}^*) = 0 \Leftrightarrow A^\perp\vec{v}^* = \vec{w}$

da cui $\vec{w} \in \operatorname{Im}(A^T)$

A COSA MI SERVE NEL CASO DEL VINCOLO V ??

Avevamo detto che

$$T_V(x_0) = \operatorname{Ker} J_G(x_0)$$

$$N_V(x_0) = T_V(x_0)^\perp$$

Per il lemma algebrico $\quad T_V(x_0)^\perp = N_V(x_0) = \operatorname{Im} G(J_G(x_0)^T)$

$$J_G^T = \underbrace{\left[\nabla G_1 \middle| \dots \middle| \nabla G_M \right]}_{M} \Big\} N$$

(So che $\nabla G_1(x_0) \dots \nabla G_M(x_0)$ sono lin. indip. e causa di N.T)

Dunque $\quad Im(J_G(x_0)^T) = \underbrace{\{\lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \dots + \lambda_M \nabla G_M(x_0) : \lambda_1 \dots \lambda_M \in \mathbb{R}\}}_{\circledast}$

$=$ spazio generato da $\nabla G_1(x_0) \dots \nabla G_M(x_0) \overset{\circledast}{=} \mathrm{span}(\text{———})$

<u>IN DEFINITIVA</u> Se V è un vincolo di codimensione M in $A \subset \mathbb{R}^N$, allora

$$T_V(x_0) = \mathrm{Ker}\, J_G(x_0)$$
$$N_V(x_0) = \mathrm{span}(\nabla G_1(x_0) \dots \nabla G_M(x_0)) = \circledast$$

<u>OSS.</u> A RIGORE $V \subset A \subset \mathbb{R}^N$ si dice vincolo di codimensione M in A se <u>ESISTE</u> una $G: A \to \mathbb{R}^M$ che verifica (N.T.) tale che $V = \{x \in A : G(x) = 0\}$

<u>SI PUÒ DIMOSTRARE</u> che, se c'è un'altra $G_1 : A \to \mathbb{R}^M$ con le stesse proprietà, le nozioni di $T_V(x)$ e $N_V(x)$ non cambiano.

Dato V, una funzione G come sopra si chiama "funzione definente" per V.

<u>Teorema</u> (moltiplicatori di Lagrange)

Supponga che V sia come sopra, e G funzione definente per V.

Supponga che $f : A \to \mathbb{R}$ sia di classe C^1.

Se $x_0 \in V$ è punto di max/min relativo per f (su V).

$\Longrightarrow \exists\, \lambda_1 \dots \lambda_M \in \mathbb{R}$ tali che

$$(\mathcal{L}) \qquad \nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \dots + \lambda_M \nabla G_M(x_0)$$

(λ_i si chiamano "moltiplicatori di Lagrange")

Cioè $\quad \nabla f(x_0) \in N_V(x_0)$

<u>Dim.</u> Se x_0 è di minimo $\Longrightarrow$ su ogni curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$

con $\gamma(0) = x_0$ $\qquad f(\gamma(t))$ ha minimo in $t = 0$

$$\Rightarrow \quad (f \circ \gamma)'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(x_0) \cdot \gamma'(0) = 0$$

DUNQUE $\nabla f(x_0)$ è ortogonale a tutte le direzioni tangenti a V in x_0. $\Rightarrow \nabla f(x_0) \in N_V(x_0)$

<u>Def.</u> I punti x_0 per cui vale $(\mathcal{L})$ $\left(\nabla f(x_0) \in N_V(x_0) \right)$ si dicono punti critici vincolati per f su V

$\#$