Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 28 28/11/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Teorema delle funzioni implicite – Teorema del Dini

Scopo: descrivere le proprietà di un insieme definito "in modo implicito"

ponendo $V = \{ x \in \mathbb{R}^N : G(x) = 0 \}$ dove G è dato
$(x \in A \subset \mathbb{R}^N)$

per esempio $S = \{ x^2+y^2+z^2 = 1 \}$ è ottenuto in questo modo
dove $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

Dimostreremo che – sotto opportune ipotesi – V è (localmente) "un grafico"

Per esempio $S = \{ x^2+y^2+z^2 = 1 \}$

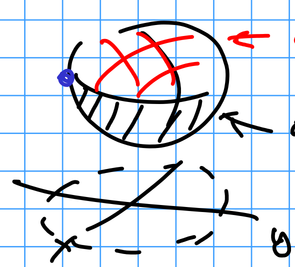


grafico di $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

grafico di $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$

esplicito z in funzione di (x,y)

INTRODUCIAMO GLI "INGREDIENTI" Ho due interi $N, M \ (\in \mathbb{N})$

A aperto in $\mathbb{R}^{N+M}$ e una funzione $G : A \to \mathbb{R}^M$

(c'è un salto di dimensione). Supponga G di classe C^1.

Conviene indicare $\mathbb{R}^{N+M}$ con $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ indicando i punti $P \in \mathbb{R}^{N+M}$ come $P = (x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^N$ $y \in \mathbb{R}^M$.

G ha una matrice Jacobiana $M \times (N+M)$. Conviene indicare

$$J_G(P) = \frac{\partial G}{\partial(x,y)}(P) = \frac{\partial G}{\partial(\underbrace{x_1 \cdots x_N}_{N}\underbrace{y_1 \cdots y_M}_{M})}(P) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_N} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_M} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial G_M}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_M}{\partial x_N} & \frac{\partial G_M}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_M}{\partial y_M} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\frac{\partial G}{\partial x} \\ \parallel \\ \frac{\partial G}{\partial(x_1,\dots,x_N)} \\ M\times N}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\frac{\partial G}{\partial y} \\ \parallel \\ \frac{\partial G}{\partial(y_1,\dots,y_M)} \\ M\times M}}$$

TEOREMA (DEL DINI)

Sia $G : A \to \mathbb{R}^M$ come sopra e sia $V = \{(x,y) \in A : G(x,y) = 0\}$

Supponiamo che ci sia un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ tale che

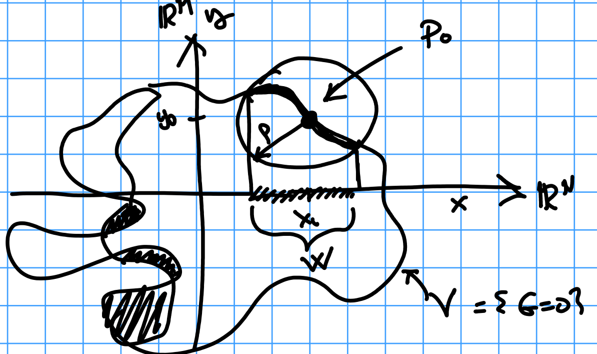
$$G(P_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \boxed{\det\left(\frac{\partial G}{\partial y}(P_0)\right) \neq 0}$$

(cioè $P_0 \in V$)

(la matrice $\frac{\partial G}{\partial y}(P_0)$, che è $M \times M$, è invertibile)

Allora esiste $\rho > 0$, esiste W aperto in $\mathbb{R}^N$ con $x_0 \in W$, (W è un intorno della prima componente x_0 di P_0) esiste $f : W \to \mathbb{R}^M$ tale che

$$V \cap B(P_0, \rho) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+M} : x \in W \text{ e } y = f(x)\}$$



INOLTRE f è C^1 in W e vale

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x)}_{M\times N} = -\underbrace{\frac{\partial G}{\partial y}(P)^{-1}}_{M\times M}\underbrace{\frac{\partial G}{\partial x}(P)}_{M\times N} \quad \forall x \in W}$$

(dove $P = (x, f(x))$)

Dim. Uso il teorema di inversione locale, applicato alla funzione:

$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ G(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ G_1(x,y) \\ \vdots \\ G_M(x,y) \end{pmatrix} \qquad \phi : A \to \mathbb{R}^{N+M}$$

Questo ϕ è chiaramente C^1 e

$$\frac{\partial \phi}{\partial(x,y)}(P) = \left[\begin{array}{c|c} I_N & 0 \\ \hline \frac{\partial G(P)}{\partial x} & \frac{\partial G(P)}{\partial y} \end{array}\right] \Rightarrow \det \frac{\partial \phi}{\partial (x,y)}(P) = \det \frac{\partial G}{\partial y}(P)$$

$\neq 0$ se $P = P_0$

$$I_N := \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{N} \Big\} N$$

CHI È L'INVERSA DI QUESTA MATRICE $\otimes$

DONQUE $\exists \rho > 0$:

- ϕ è iniettivo su $B(P_0, \rho)$
- $\Omega_1 := \phi(B(P_0, \rho))$ è un aperto di $\mathbb{R}^{N+M}$
- $\exists \ \Psi = \phi^{-1}$ $\quad \Psi : \Omega_1 \to B(x_0, \rho)$ e

$$J_\Psi(Q) = \underbrace{J_\phi(\Psi(Q))^{-1}}_{\otimes} \qquad \forall Q \in \Omega_1$$

La matrice che voglio invertire ha la struttura $\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix} = \mathcal{A}$ dove B è invertibile. Scommettiamo sul fatto che $\mathcal{A}^{-1} := \mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \vdots & B^{-1} \end{bmatrix}$. Proviamo a fare i conti

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A + BC & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

ci vuole $A + BC = 0$

$\Leftrightarrow \quad C = -B^{-1}A$

Dunque $\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^{-1}A & B^{-1} \end{bmatrix}$ che nel caso in esame:

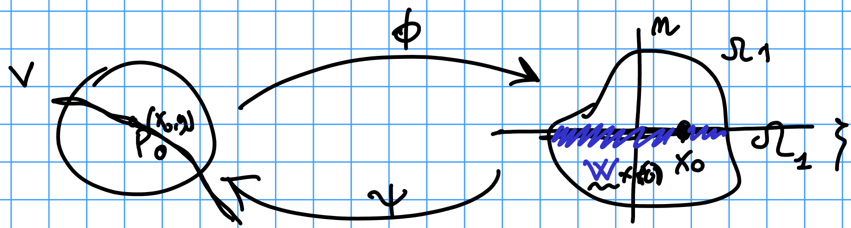
$$\begin{bmatrix} I_N & 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(p_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(p_0) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_N & 0 \\ -\frac{\partial G}{\partial y}^{-1}\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}(p_0)^{-1} \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial g}{\partial x}$

Sarebbe in colonna

Vediamo meglio com'è fatto $\psi = \phi^{-1}$ $\quad \left(\phi(x,y) = (x, G(x,y)) \right)$

Chiamo (ξ,η) i punti di Ω_1 $\quad \xi \in \mathbb{R}^N, \ \eta \in \mathbb{R}^M$



$$\left(\begin{array}{l} G(x_0,y_0) = 0 \\ \phi(x_0,y_0) = (x_0, 0) \end{array} \right)$$

$\psi(\xi,\eta) = (\psi_1(\xi,\eta), \psi_2(\xi,\eta))$. Dato che $\psi = \phi^{-1}$

$$(\xi,\eta) = \phi(\psi(\xi,\eta)) = \phi(\psi_1(\xi,\eta), \psi_2(\xi,\eta)) =$$

$$= (\psi_1(\xi,\eta), G(\psi_1(\xi,\eta), \psi_2(\xi,\eta))) \qquad \forall (\xi,\eta) \in \Omega_1$$

DUNQUE $\psi_1(\xi,\eta) = \xi \qquad \boxed{G(\xi, \psi_2(\xi,\eta)) = \eta}$

Definisco $W = \{ x \in \mathbb{R}^N : (x,0) \in \Omega_1 \}$.

Si vede che W è un aperto e che $x_0 \in W$. Se $x \in W$ definiamo $\boxed{g(x) = \psi_2(x,0)}$. Da quanto trovato vedo che

$$G(x, g(x)) = G(x, \psi_2(x,0)) = 0$$

In realtà, guardando bene i passaggi, vedo che

$$\boxed{x \in W \qquad G(x,y) = 0 \iff y = g(x)}$$

Ho trovato la tesi (riguardo all'esistenza di g)

Rimane da dimostrare che $J_g(x) = -\frac{\partial G}{\partial y}(x, g(x))^{-1} \frac{\partial G}{\partial x}(x, g(x))$

Dato che $g(x) = \psi_2(x,0)$, usando il calcolo degli Jacobiani,
(formalmente $g = \pi_2 \psi(x,0)$) dunque

$f = \pi_2 \circ \psi \circ L \qquad L(x) = (x, 0)$)

se si calcolano i vari Jacobiani e si fa il prodotto si trova la tesi)

FINE DIM.

VERSIONE BASE ($M=1$). Rivediamo l'enunciato quando $M=1$

$A \in \mathbb{R}^{N+1} \qquad G : A \to \mathbb{R} \qquad P_0 = (x_0, y_0) \qquad x_0 \in \mathbb{R}^N, y_0 \in \mathbb{R}$

$G(x_1 \dots x_N, y)$

NUMERO

$$G(x_0, y_0) = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

$V = \{(x,y) : G(x,y) = 0\}$.

(per esempio $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, qui $A = \mathbb{R}^3$, $V =$ sfera)

Allora $\exists \rho > 0$:, $\exists W \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $W \ni x_0$, $\exists f : W \to \mathbb{R}$ tale che

$$\{(x,y) : G(x,y) = 0\} \cap B(P_0, \rho) = \{(x,y) : x \in W, y = f(x)\}$$

Inoltre f è C^1 e

$$\forall x \in W \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, f(x))} \quad \leftarrow \text{NUMERO}$$

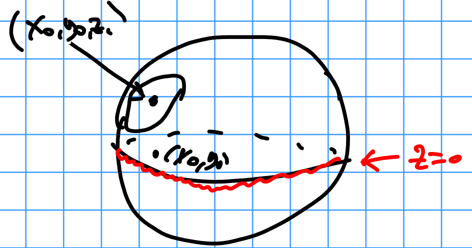
Nel caso dell'esempio $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, abbiamo che

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 2z \qquad \text{(z gioca il ruolo di y nell'enunciato)}$$

Dunque se $(x_0, y_0, z_0) \in S$ (= sfera di raggio 1) con $z_0 \neq 0$

so che esiste la f, definita in un intorno W di (x_0, y_0) t.c.

$$S \cap B(P_0,\rho) = \{(x,y,z) : (x,y) \in W \text{ e } z = f(x,y)\}$$



$$\begin{cases} f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se } z_0>0 \\ f(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se } z_0<0 \end{cases}$$

(in questo caso <u>so</u> chi è f.) Supponiamo $z_0>0$

Allora (dato che conosco f) posso calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dots = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

CONFRONTIAMO QUESTO RISULTATO CON LA FORMULA DATA DAL TEOREMA

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z)} = \quad (\text{dove } z = f(x,y))$$

$$= -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$ <u>TORNA</u>

<u>OSS.</u> (sempre nel caso $M=1$) Consideriamo $A \subset \mathbb{R}^N$ $N>1$

Se $G: A \to \mathbb{R}$ $P_0 \in A$

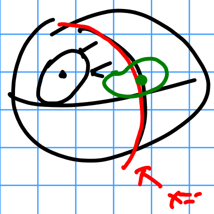
Se suppongo che $\exists\, i = 1 \dots N$ per cui $\frac{\partial G}{\partial x_i}(P_0) \neq 0$, allora

posso rifare tutto, esplicitando la i-esima variabile rispetto alle altre

Nell'esempio della sfera posso rifare tutto se $P_0 = (x_0,y_0,z_0) \in S$

e $\boxed{x_0 \neq 0}$ $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x \neq 0$. In questo caso trovo un intorno di (y_0,z_0), W, e una $f: W \to \mathbb{R}$ tale che

$$S \cap B(P_0, \rho) = \{(x,y,z) : (y,z) \in W \quad x = f(y,z)\}$$



<u>IN GENERALE</u> Se $\nabla G(P_0) \neq 0$ allora V è "localmente" un grafico — RISPETTO A UN ASSE OPPORTUNO (quello che ha $\frac{\partial}{\partial x_i} G \neq 0$)

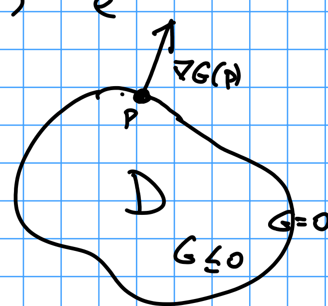
<u>OSS.</u> Supponiamo $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, C^1, e tale che

$$\nabla G(x) \neq 0 \qquad \forall x \in V = \{G(x) = 0\}$$

Chiamo anche $D = \{x \in \mathbb{R}^N : G(x) \leq 0\}$

Allora D è chiuso (solo perché G è continua) e

$$\partial D = V$$



Osserviamo anche che, se $P \in \partial D = V$

allora $\nabla G(P)$ è un vettore "normale" a ∂D

IN CHE SENSO ??

<u>Def.</u> Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$, $P_0 \in A$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ dico che $\vec{v}$ è tangente ad A in X_0 se esiste una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to A$ $\varepsilon > 0$, di classe C^1, con $\gamma(0) = P_0$ $\gamma'(0) = \vec{v}$

Dico che $\vec{n}$ è normale ad A in P_0 se $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ $\forall \vec{v}$ tangente

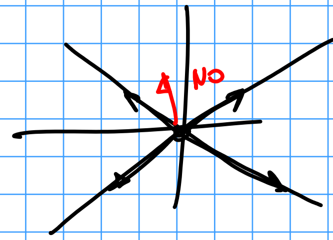
<u>NON</u> è detto che le direzioni tangenti / normali formino uno spazio vettoriale

$A = \{ x^2 = y^2 \}$ in $\mathbb{R}^2$

$P_0 = (0,0)$

le dir. tangenti sono

$\{\lambda(1,1) \;\; \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\lambda(1,-1) \;\; \lambda \in \mathbb{R}\}$



(A è un insieme "brutto")

Vediamo allora che, se $\nabla G(P_0) \neq 0$ e $V = \{G = 0\}$, $P_0 \in V$

∇G è normale a V

Infatti se $\vec{v}$ è una direzione tangente a V in P_0 deve esistere una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ $\quad \gamma(0) = P_0 \quad \gamma'(0) = \vec{v}$

$(\gamma(t) \in V \;\; \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$

Ma allora

$$\forall t \in (\varepsilon, \varepsilon) \quad G(\gamma(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} G(\gamma(t)) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \nabla G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \Big|_{t=0} \quad \nabla G(P_0) \cdot \vec{v} = 0$$

dunque $\nabla G(P_0)$ è $\perp$ a tutte le $\vec{v}$ tangenti !!

HO FISSATO UNA LEZIONE DI RECUPERO

LUNEDÌ 18/12 aula C11 a 10.30

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$$