Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 27 27/11/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Inverso di una mappa "$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$" (stessa dim. in partenza e in arrivo. - DIFFERENZIABILITÀ DELL'INVERSA -

In una variabile: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ (per un opportuno (c,d)) e

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{dove} \quad f(x) = y$$

IN UNA VARIBILE, $f'(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \,/\, f'(x) < 0 \Rightarrow$
f strett crescente / decrescente $\Rightarrow f(a,b) = (c,d) \ldots\ldots$

NON SI PUÒ RIPRODURRE IN $\mathbb{R}^N$

IN $\mathbb{R}^N$ C'È IL SEGUENTE

TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE.

Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^N$ sia aperto. Supponiamo $\Phi : A \to \mathbb{R}^N$ una funzione $C^1(A)$ e supponiamo $x_0 \in A$ per cui

$$\det\left(J_\Phi(x_0)\right) \neq 0 \quad (\text{cioè } J_\Phi(x) \text{ è invertibile})$$

Allora

(a) $\exists$ $r > 0$ tale che Φ è iniettiva in $\Omega := B(x_0, r) \subset A$

(b) l'insieme immagine $\Omega_1 = \Phi(\Omega)$ $\left(= \{ y \in \mathbb{R}^N : \exists x \in \Omega \text{ con } \Phi(x) = y \}\right)$

è un aperto.

OVVIAMENTE È DEFINITA $\Phi^{-1} : \Omega_1 \to \Omega$

(c) Φ^{-1} è C^1 in Ω_1 e vale la formula

$$J_{\Phi^{-1}}(y) = J_\Phi(x)^{-1} \qquad \text{dove } \Phi(x) = y$$

cioè

$$\boxed{J_{\Phi^{-1}}(y) = J_\Phi\left(\Phi^{-1}(y)\right)^{-1} \qquad \forall y \in \Omega_1}$$

NON LO DIMOSTRIAMO.

~ se $J_\phi(x_0)$ è invertibile $\Rightarrow$ ϕ è invertibile vicino a x_0

Il teorema NON DICE

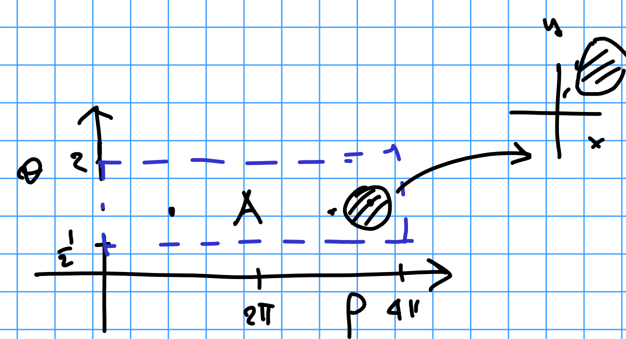
$$\det\left(J_\phi(x)\right) \neq 0 \quad \forall x \in A \quad \Longrightarrow \quad \exists \phi^{-1} : \phi(A) \to A$$

e in effetti questo non è vero.

CONTROESEMPIO (coordinate polari)

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$A = \{ (\rho, \theta) : \tfrac{1}{2} < \rho < 2, \ 0 < \theta < 4\pi \}$$



$$J_\phi(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\theta), & \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\theta), & \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\sin\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det J_\phi(\rho,\theta) = \rho \cdot 1 = \rho > 0 \quad (\text{se } \tfrac{1}{2} < \rho < 2)}$$

Però ϕ NON È INIETTIVA su A, infatti

$\phi(\rho, \pi) = \phi(\rho, 3\pi)$

ϕ è localmente invertibile MA NON È INVERTIBILE !!

ESEMPIO $\quad \phi(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

$$J_\phi(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \qquad \det_\phi(x,y) = 4(x^2+y^2)$$

Se definisco $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ho $\det(J_\phi(x,y)) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in A$

VEDIAMO DI CAPIRE CHI È l'immagine $\Phi(A)$ ed eventualmente calcoliamo "ϕ^{-1}". Devo studiare il sistema

$\boxed{\phi(x,y) = (\xi, \eta)}$ al variare di (ξ,η) cercando di capire se — e quante sono — le (x,y) per cui vale

$$\left(\phi(A) = \{(\xi,\eta) \text{ per cui } \exists\, (x,y) \text{ con } \phi(x,y) = (\xi,\eta)\} \right)$$

NOTA È facile vedere che $\phi(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$

infatti $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$

PRENDIAMO ALLORA $(\xi,\eta) \neq (0,0)$ e cerchiamo le sol. di

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \xi \\ 2xy = \eta \end{cases}$$

- $\boxed{\eta = 0}$ $\Rightarrow$ uno tra x e y fa zero (non entrambi)
  $\xi \neq 0$
  se $x = 0$ dalla prima ho che $-y^2 = \xi$, dunque questo è possibile solo se $\xi < 0$
  QUINDI se $\boxed{\eta = 0 \quad \xi > 0 \quad \text{deve essere } y = 0 \quad x = \pm\sqrt{\xi}}$
  Analogamente se $\boxed{\eta = 0 \quad \xi < 0 \quad \text{deve essere } x = 0 \quad y = \pm\sqrt{-\xi}}$
- $\boxed{\eta \neq 0}$ $\Rightarrow$ $xy \neq 0$ entrambi x e y sono $\neq 0$. Dalla II^a ricavo $y = \frac{\eta}{2x}$. Lo metto nella I^a

$$x^2 - \frac{\eta^2}{4x^2} = \xi \iff 4x^4 - 4\xi x^2 - \eta^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{2\xi \pm \sqrt{4\xi^2 + 4\eta^2}}{4} = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}$$

IL SEGNO − NON VA BENE

$$\circledast \quad \boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2} + \xi}}$$

Per le y ho

$$\frac{\eta}{\pm \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2} + \xi}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \eta \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2} - \xi}{\xi^2 + \eta^2 - \xi^2}} \right) =$$

$$\pm \frac{\eta}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2} - \xi}}{|\eta|}$$

$\psi(\xi,\eta)$, $+/-$

$$\circledast \quad \boxed{y = \pm \operatorname{sgn}(\eta) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2} - \xi}}$$

DUNQUE, per ogni $(\xi,\eta) \neq (0,0)$ esiste una coppia $\pm(x,y)$ tali che $\phi(\pm(x,y)) = (\xi,\eta)$. FORMALMENTE

$$\Phi(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = A \qquad (\Phi \text{ è surgettiva da } A \to A)$$

OSS Quanto trovato ora è chiaro se guardo in coordinate polari:

: $x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \sin\theta$

$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} \rho^2 \cos^2\theta - \rho^2 \sin^2(\theta) \\ 2\rho^2 \sin\theta \cos\theta \end{pmatrix} = \rho^2 \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

Questo corrisponde alla mappa $z \to z^2$ in $\mathbb{C}$

Prendiamo $(x=1,\ y=1)$ $\quad \phi(1,1) = (0,\ 2)$

Prendiamo $\psi(\xi,\eta)$ l'espressione trovata sopra con il $+$

Calcoliamo $J_\psi(0,2)$ $\qquad (\psi(\xi,\eta) = (x(\xi,\eta),\ y(\xi,\eta)))$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(0,2) = \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2} + \xi} \Bigg|_{(\xi=0,\eta=2)} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{\xi^2+\eta^2} + \xi}} \left(\underbrace{\frac{2\xi}{2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}_{=0} + 1 \right) \Bigg|_{\xi=0,\eta=2} = \frac{1}{4}$$

Dovrei fare $\frac{\partial x}{\partial r}(0,2) \to \frac{1}{4}$ $\quad \frac{\partial y}{\partial z}(0,2) \to -\frac{1}{4}$ $\quad \frac{\partial y}{\partial m}(0,2) \to \frac{1}{4}$ . . .

Vediamo cosa ci dice il Teorema di inversione locale:

$$J_\psi(0,2) = J_\phi(1,1)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

(perché $\psi(0,2) = (1,1)$) $\qquad$ (fare il conto!)

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

OSS. Se vale l'ipotesi in x_0:

$$\{x \text{ "vicino a } x_0\text{"} : \phi(x) = \phi(x_0)\} = \{x_0\}$$

(Se cambio le dimensioni e suppongo $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ con $N > M$

ci . —)

continuiamo domani