Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 26 22/11/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Domanda di un compitino:

Dato $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ forma quadratica, $\overline{B} = \{\|x\| \le 1\}$, $S = \{\|x\| = 1\}$

DIRE SE SONO VERE / FALSE le affermazioni

(A) φ strettamente positivo $\iff$ $\min_S \varphi > 0$ VERA

(B) " " " $\iff$ $\min_{\overline{B}} \varphi > 0$ FALSA

(C) φ semidefinito positivo $\iff$ $\min_S \varphi \ge 0$ VERA

(D) " " " $\iff$ $\min_{\overline{B}} \varphi \ge 0$ VERA

(E) φ strettamente positivo $\iff$ $\min_{\overline{B}} \varphi \ge 0$ FALSA

$\boxed{A}$ $\boxed{C}$ sono <u>VERE</u>

<u>Oss.</u> Questi minimi esistono perché φ è continua e $\overline{B}$, S sono limitati e chiusi (COMPATTI)

$\boxed{A}$ è vera perché ...

(1) se $\varphi(x)>0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow \varphi(x)>0 \quad \forall x \in S$

$\Rightarrow \quad \nu := \min_S \varphi > 0$

(2) viceversa supponiamo $\nu := \min_S \varphi > 0$. Allora dato un qualunque $x \neq 0$ posso scrivere

$$\varphi(x) = \varphi\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) \underset{\varphi \text{ è quadratico}}{=} \|x\|^2 \varphi\Big(\overset{\in S}{\frac{x}{\|x\|}}\Big) \geq \boxed{\|x\|^2 \nu}$$

e quindi $\varphi(x)>0 \quad \forall x \neq 0$

Per la $\boxed{C}$ si fa nello stesso modo.

- LA $\boxed{B}$ è falsa perché, qualunque sia φ forma quadratica,

$$\min_{\bar{B}} \varphi \leq \varphi(0) = 0$$

- LA $\boxed{D}$ è vera.

(1) se $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{B} \Rightarrow \min_{\bar{B}} \varphi \geq 0$

(2) $\min_{\bar{B}} \varphi \geq 0 \Rightarrow \min_S \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \geq 0$ (per la $\boxed{C}$)

(NOTA CHE $\min_{\bar{B}} \varphi \geq 0 \Leftrightarrow \min_{\bar{B}} \varphi = 0$)

- LA $\boxed{E}$ è falsa

Per esempio $\varphi(x) = 0$. In questo caso $\min_{\bar{B}} \varphi = 0 \geq 0$ ma φ non è strettamente positiva

DUNQUE "$\Leftarrow$" è falsa

VICEVERSA la "$\Rightarrow$" è vera

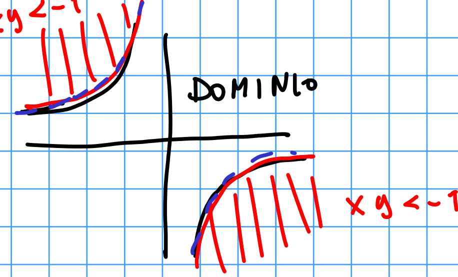
Dal compitino del 17/11/2017

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 3xy \underbrace{- 2\ln(1+xy)}_{\to +\infty \text{ se } (x,y) \to (x_0,y_0) \text{ con } x_0 y_0 = -1}$$

DOMINIO: $1+xy>0 \iff xy>-1$

$y > -\frac{1}{x} \quad x>0$

$y < -\frac{1}{x} \quad x<0$



PTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y - 2\,\frac{1}{1+xy}\,y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 3x - 2\,\frac{1}{1+xy}\,x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 + \frac{2y^2}{(1+xy)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 + \frac{2x^2}{(1+xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3 - 2\,\frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2} = -3 - \frac{2}{(1+xy)^2}$$

$$(*)\begin{cases} 4x - \left(3 + \frac{2}{1+xy}\right)y = 0 \\ -\left(3+\frac{2}{1+xy}\right)x + 4y = 0 \end{cases}$$

se (x,y) è sol. $\Rightarrow$

o $(x,y) = (0,0)$ oppure

$$\det\begin{bmatrix} 4 & -\left(3+\frac{2}{1+xy}\right) \\ -\left(3+\frac{2}{1+xy}\right) & 4 \end{bmatrix} = 0$$

La seconda condizione mi dà $16 = \left(3+\frac{2}{1+xy}\right)^2 \iff 3 + \frac{2}{1+xy} = \pm 4$

$$\frac{2}{1+xy} = \begin{cases} 1 \\ -7 \end{cases}$$ ← IMPOSSIBILE, perché $1+xy>0$ nel dominio

$\frac{2}{1+xy} = 1 \iff 2 = 1+xy \iff xy = 1$

TORNIAMO AL SISTEMA

$$\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ -4x+4y=0 \\ xy = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ xy = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\boxed{(0,0) \quad \pm(1,1)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 + \frac{2y^2}{(1+xy)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 + \frac{2x^2}{(1+xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3 - 2\,\frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2} = -3 - \frac{2}{(1+xy)^2}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow \det < 0 \quad , \quad \text{PTO DI SELLA}$$

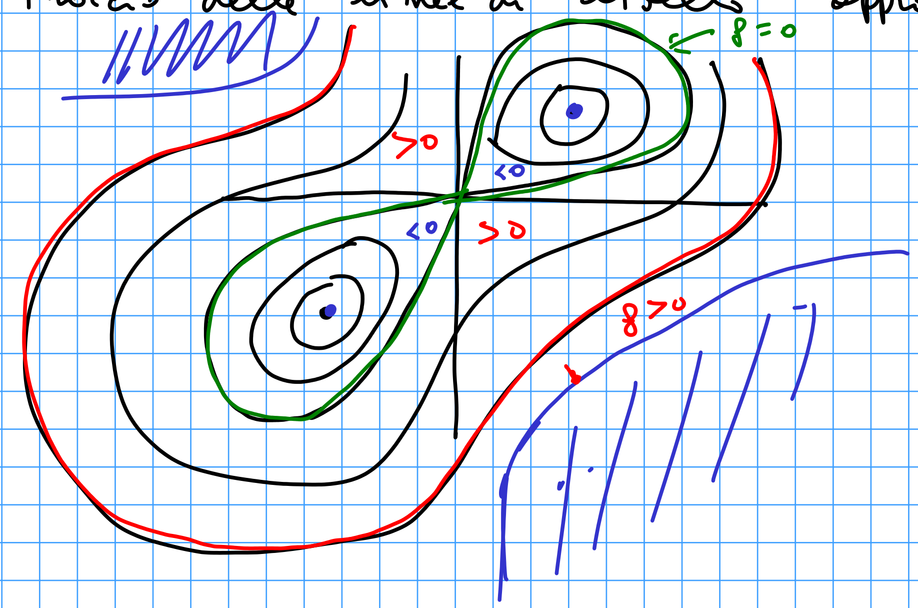
$$Hf(1,1) = \begin{bmatrix} 4+\frac{2}{4} & -3-\frac{2}{4} \\ -3-\frac{2}{4} & 4+\frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$\det > 0$
$a_{11} = \frac{9}{2} > 0$

PTO DI MINIMO

$Hf(-1,-1)$ è lo stesso . . .   PTO DI MINIMO

Traccio delle linee di livello "approssimative"



$f(\pm(1,1)) =$

$2 + 2 - 3 - 2\ln(2) =$

$\boxed{1 - 2\ln(2)}$

VALORE DI f in $\pm(1,1)$

$f(0) = 0$

DOMANDA Posso dire che f ha minimo.

Cerco di usare Weierstrass gen. In questo caso devo fare DUE VERIFICHE

① se $(x_0, y_0) \in \partial \text{Dominio} \setminus \text{Dominio}$, cioè se $x_0 y_0 + 1 = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$$

VERA a causa del termine $-2\ln(1+xy)$

② $$\lim_{\substack{\|(x,y)\|\to\infty \\ (x,y)\in \text{Dom}}} f(x,y) = +\infty \quad ??$$

$$f(x,y) = \underbrace{2x^2 - 3xy + 2y^2}_{q(x,y)} \underbrace{-2\ln(1+xy)}_{h(x,y)}$$

q è una forma quadratica, la cui matrice è $\begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix} = A$

$a_{11} = 2 > 0 \qquad \det A = 4 - \frac{9}{4} = \frac{16-9}{4} > 0$

q è def. positiva $\Rightarrow$

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} q(x,y) = +\infty$$

ANZI so che $\exists\, \nu > 0$ tale che $q(x,y) \geq \nu \|(x,y)\|^2$

VOGLIO " CONFRONTARE $h(x,y)$ con $\|(x,y)\|$ "

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{\|(x,y)\|^2}{2}$$

$$1 + xy \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{2} + 1$$

$$\ln(1+xy) \leq \ln\left(1 + \frac{\|(x,y)\|^2}{2}\right)$$

$$-2\ln(1+xy) \geq -2\ln\left(1 + \frac{\|(x,y)\|^2}{2}\right)$$

DUNQUE $f(x,y) \geq \underbrace{\nu \|(x,y)\|^2 - 2\ln\left(1 + \frac{\|x,y\|^2}{2}\right)}$

questo è una funzione di $\|x,y\|$ che tende a $+\infty$ se $\|(x,y)\| \to +\infty$

$h(\|x,y\|)$ dove $h(t) = \nu t^2 - 2\ln(1 + t^2/2)$ $\circledast$

e $\lim_{t \to +\infty} h(t) = +\infty$

DUNQUE $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} \nu t^2 - \ln(1+t^2/2) = \lim_{t\to+\infty} t^2\left(\nu - \frac{\ln(1+t^2/2)}{t^2}\right)$$

se dimostro che $\underbrace{\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t^2/2)}{t^2}}_{\text{lo posso fare con de l'Hôpital}} = 0 \Rightarrow$ TENDE A $+\infty$

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{\ln(1+s/2)}{s} \overset{\text{Hôp.}}{=} \lim_{s\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{1+s/2}}{1} = 0$$

IN DEFINITIVA f ha minimo $\Rightarrow$

$\pm(1,1)$ sono pti di min. assoluto e

$$\min_{\text{Dom.}} f = f(\pm(1,1)) = 1 - 2\ln(2)$$

ULTIMA DOMANDA se pongo $M = \{(x,y) : f(x,y) \leq 0\}$

$\left(\text{sottinteso} = \{(x,y) : xy+1>0,\ f(x,y)\leq 0\}\right)$

POSSO DIRE CHE M è limitato

RISPOSTA SÌ a causa del fatto che $f \to +\infty$ se $\|x,y\| \to +\infty$

DIM. Se M non fosse limitato $\Rightarrow \exists\ P_n = (x_n, y_n)$ in M tali che $\|P_n\| \to +\infty$. MA ALLORA $f(P_n) \to +\infty$

MA allora $f(P_n) > 0$ per n grande e questo contraddice il fatto che $P_n \in M \Leftrightarrow f(P_n) \leq 0$.

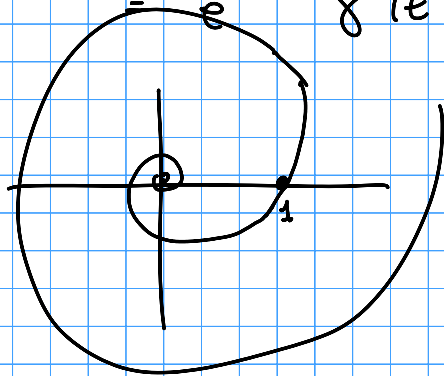
TORNIAMO ALLE CURVE

SPIRALI (in $\mathbb{R}^2$)

$\alpha > 0$ (per fissare le idee)

(1) $$\gamma(t) = e^{\alpha t} \overbrace{(\cos(t), \sin(t))}^{\hat{\gamma}(t)} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$= e^{\alpha t} \hat{\gamma}(t)$$

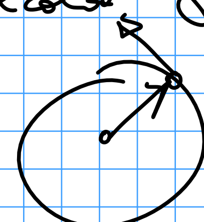


SPIRALE LOGARITMICA

Prendiamo $-\infty < a < b < +\infty$ e calcoliamo la lunghezza del tratto di curva tra a e b, cioè

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

MI CALCOLO $\gamma'(t)$. Conviene calcolare $\hat{\gamma}'(t)$



$$\hat{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t))$$
$$\hat{\gamma}'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

NOTO CHE $\hat{\gamma}' \cdot \hat{\gamma} = 0$ (lo vedo, oppure mi ricordo che $\|\hat{\gamma}(t)\|^2 = 1 \Rightarrow$ derivando $2\langle \hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma} \rangle = 0$

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}\hat{\gamma}(t)\right) = \alpha e^{\alpha t}\hat{\gamma}(t) + e^{\alpha t}\hat{\gamma}'(t)$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \alpha^2 e^{2\alpha t} \underbrace{\|\hat{\gamma}(t)\|^2}_{=1} + e^{2\alpha t} \underbrace{\|\hat{\gamma}'(t)\|^2}_{=1} \Rightarrow$$

$$\|\gamma'(t)\| = e^{\alpha t}\sqrt{1+\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \ell\left(\gamma|_{[a,b]}\right) = \int_a^b e^{\alpha t}\sqrt{1+\alpha^2}\, dt = \sqrt{1+\alpha^2}\left(\frac{e^{\alpha b} - e^{\alpha a}}{\alpha}\right)$$

Mettiamo $b = 0$ $\quad a < 0 \Rightarrow \ell(\gamma) = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\left(1 - e^{\alpha a}\right)$

Se $\alpha \to -\infty$ trovo la "lunghezza della curva da $-\infty$ a 0"

che è comunque finita e vale $\dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}$

OSS. Calcoliamo l'angolo $\vartheta(t)$ tra $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$

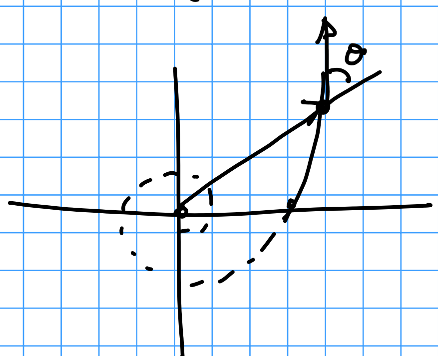
Ricorda che $\cos(\vartheta(t)) = \dfrac{\gamma(t)\cdot\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|\,\|\gamma'(t)\|} =$

$$\frac{\left(e^{\alpha t}\hat{\gamma}(t)\right)\cdot\left(\alpha e^{\alpha t}\hat{\gamma}(t)+e^{\alpha t}\hat{\gamma}'(t)\right)}{e^{\alpha t}\quad e^{\alpha t}\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{\alpha\, e^{2\alpha t}}{e^{2\alpha t}\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$\hat{\gamma}\cdot\hat{\gamma} = 1 \qquad \hat{\gamma}\,\hat{\gamma}' = 0$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$ NON DIPENDE DA t !!

DUNQUE C'E' UN $\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\cos\vartheta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ e tale che



ESERCIZIO Data la curva $\gamma(t) = (t, e^t, t^2)$ $\quad 0\le t\le 1$

e il "campo" $\vec{f}(x,y,z) = (xz, y^2, z)$

CALCOLARE $\displaystyle\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$ (integrale curvilineo di II specie)

USO LA FORMULA

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$\int_0^1 (xz, y^2, z)\Big|_{\substack{x=t\\ y=e^t\\ z=t^2}}\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$\int_0^1 (t^3, e^{2t}, t^2)(1 \quad e^t \quad 2t)\, dt =$$

$$\int_0^1 \left(t^3 + e^{3t} + 2t^3\right) dt = \int_0^1 \left(e^{3t} + 3t^3\right) dt =$$

$$\left[\frac{e^{3t}}{3} + \frac{3}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{e^3}{3} + \frac{9-4}{12} = \frac{e^3}{3} + \frac{5}{12}$$

$$f(x,y,z) = (1 - x - y + xy)\, e^{x+y+z}$$

$$P_0 = (1, 1, -2)$$

Voglio P_{3,P_0}, nelle variabili $x-1$, $y-1$, $z+2$

DUNQUE VOGLIO $P_{3,0}$ di $f(1+\alpha, 1+\beta, -2+\gamma) =$

$$(*) = \left(1 - (1+\alpha) - (1+\beta) + (1+\alpha)(1+\beta)\right) e^{1+\alpha+1+\beta+\gamma-2} =$$

$$(-1 - \alpha - \beta + 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta)\, e^{\alpha+\beta+\gamma} = \underbrace{\alpha\beta\, e^{\alpha+\beta+\gamma}}_{\text{VOGLIO LO SVILUPPO ALL'ORDINE 3}}$$

Uso $e^t = 1 + t + o(t)$ e metto $t = \alpha+\beta+\gamma$

$$(*) = \alpha\beta\left(1 + \alpha+\beta+\gamma + o(\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{P})\right) = (**)$$

dato che $\alpha = O(\|P\|)$ $\beta = O(\|P\|)$ $\gamma = O(\|P\|) \Rightarrow$

$\alpha+\beta+\gamma = O(\|P\|) \Rightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) = O(\|P\|^3)$

$$(**) = \underbrace{\alpha\beta + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma}_{P_3(\alpha,\beta,\gamma) =} + o(\|\alpha,\beta,\gamma\|^3)$$

NE SEGUE

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(P_0) = \text{coeff del termine } (2,1,0) \times (2,1,0)! = 2$$

$$= 1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(P_0) = \underbrace{\text{coeff del termine } (1,1,1)}_{=1} \times \underbrace{(1,1,1)!}_{=1} = 1$$