Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

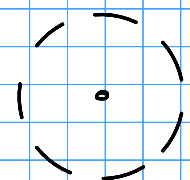
Lezione 25 21/11/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

ESERCIZI VARI

- COMPITINO del 2/12/22



A

$\boxed{1}$ $A = \{ 0 < x^2+y^2 < 1 \}$

$B = \{ x^2+y^2 \le 1 \}$

$C = \{ x^2+y^2 = 1 \} \cup \{(0,0)\}$

Domande: (a) A è aperto SÌ IN QUANTO INTERSEZIONE DI $\{x^2+y^2<1\}$ e $\{x^2+y^2>0\}$ entrambi aperti, dato che $f(x,y) = x^2+y^2$ è una funzione continua.

(b) B = chiusura di A (cioè $B = \overline{A}$).

$\boxed{\text{SÌ}}$ Sicuramente $\overline{A} \subset B$ dato che $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B} = B$

e B è chiuso (B è chiuso perché f è continua, $B = \{f \le 1\}$)

Devo vedere che vale $B \subset \overline{A}$. IN SOSTANZA DEVO FAR VEDERE che $(0,0) \in \overline{A}$ e che $S(0,1) \subset A$

Si fa "a mano"

($(0,0) \notin A \Rightarrow$ ogni intorno di $(0,0)$ contiene un pto fuori di A) d'altro parte $\forall \varepsilon > 0$ è chiaro che in $B((0,0), \varepsilon)$ ci sono punti di A

DUNQUE $(0,0) \in \partial A \subset \bar{A}$

- Stesso discorso per i punti P con $\|P\| = 1$

(non faccio i dettagli)

DUNQUE $\boxed{B = \bar{A}}$

(c) $A = \mathring{B}$?? **NO** perché $\mathring{B} \ni (0,0)$

mentre $(0,0) \notin A$.

infatti $B((0,0),1) \subset B$

(c'è un intorno di $(0,0)$ tutto contenuto in $B \Rightarrow (0,0) \in \mathring{B}$)

(d) $C = \partial A$ perché - come abbiamo visto sopra -

$\bar{A} \setminus A = B \setminus A = C$

PERÒ LA DOMANDA ERA se $C = \partial B \Leftarrow$ **NO**

(perché $(0,0) \in \mathring{B}$. $\longleftarrow$ $(0,0)$ NON È in ∂B

mentre $(0,0) \in C$) Naturalmente $\partial B \subset C$

$\boxed{2}$ $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da:

$$\Phi(x,y) = (2xy, x^2 - y^2) \qquad f(x,y) = \|\Phi(x,y)\|$$

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) =$ ______ ; $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) =$ ______

Svolgimento 1.

Scrivo $f(x,y) = \sqrt{(2xy)^2 + (x^2-y^2)^2}$ e faccio le derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{8xy^2 + 2(x^2-y^2)2x}{2\sqrt{4x^2y^2 + (x^2-y^2)^2}} \xrightarrow{\text{IN } (2,-1)} \frac{16+24}{2\sqrt{16+9}}$$

$$= \frac{40}{10} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{8x^2y + 2(x^2-y^2)(-2y)}{2\sqrt{4x^2y^2 + (x^2-y^2)^2}} \longrightarrow \frac{-32+12}{10} = -2$$

Altro modo di vedere le cose

$$h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{DUNQUE } f = h \circ \Phi$$

$$\Rightarrow \quad J_f(2,-1) = J_h(\Phi(2,-1))\, J_\Phi(2,-1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \Big| \quad \Phi(2,-1) = (-4, 3)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = -2y$$

$$J_\Phi(2,-1) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad J_h(-4,3) = \left[\frac{-4}{5}, \frac{3}{5} \right]$$

$$J_f(2,-1) = \left[\frac{-4}{5}, \frac{3}{5} \right] \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \left[\frac{8}{5} + \frac{12}{5}, \frac{-16}{5} + \frac{6}{5} \right] = [4, -2]$$

$\boxed{3}$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^4}{x^4+y^4} \qquad (f(0,0) = 0)$$

(a) f continua ? (IN ZERO) $\boxed{\text{SI}}$ $\qquad x^2 y^2 \le \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2}$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) \le \frac{\frac{x^4+y^4}{2}\, y^2}{x^4+y^4} = \frac{y^2}{2} \quad \left(\to 0 \text{ se } (x,y) \to (0,0) \right)$$

(b) DERIVATE DIREZIONALI $\qquad \vec{v} = (v_x, v_y)$

$$\frac{f(t\vec{v})}{t} = \frac{1}{t} \frac{t^6}{t^4} \frac{v_x^2 v_y^4}{v_x^4 + v_y^4} = t \frac{v_x^2 v_y^4}{v_x^4+v_y^4} \longrightarrow 0$$

DUNQUE $\quad f'(0,0)(v_x,v_y) = 0 \quad \forall (v_x, v_y)$

(E' LINEARE IN (v_x, v_y) !!!)

$\boxed{4}$ f è differenziabile in $(0,0)$?? Vediamo x volg la definizione:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \qquad \text{CIOE'}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^4}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^4+y^4)}$$

COME PRIMA:

$$\frac{x^2 y^4}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^4+y^4)} \leq \frac{1}{2}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y|}{2}\underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1}$$

$$\left(|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad \leq \frac{|y|}{2} \to 0 \text{ se } (x,y)\to(0,0)$$

SI' E' DIFFERENZIABILE.

- POSSO ANCHE PROVARE A USARE IL TEOR. DEL. DIFF. TOT.

Per questo devo calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{e mostrare che tende a} \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$$

(lo vedo dalla def. di derivata)
(oppure noto che $f'(0)(\hat{e}_1)=0$ perché tutte le $f'(0)(\vec{v})=0$)

- stesso discorso per $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ $(\to 0)$

Vediamo la $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{2xy^4(x^4+y^4) - x^2y^4\,4y^3}{(x^4+y^4)^2}\right| =$

$$\left|\frac{xy^4(2x^4+y^4 - 4xy^3)}{(x^4+y^4)^2}\right| \leq |x|\frac{(x^4+y^4)(}{(x^4+y^4)^2}$$

??

RIPARTO DA

uso: $x^4 \leq x^4+y^4$
$y^4 \leq x^4+y^4$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq \left|\frac{2xy^4}{x^4+y^4}\right| + \frac{4x^2y^7}{(x^4+y^4)^2}$$

CONVIENE USARE: $|x| \leq (x^4+y^4)^{1/4}$ $\Rightarrow$
$|y| \leq (x^4+y^4)^{1/4}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq \frac{2(x^4+y^4)^{\frac{5}{4}}}{x^2+4} + 4\frac{(x^4+y^4)^{\frac{8}{4}}}{(x^4+y^4)^2} = 5\,(x^4+y^4)^{1/4} \to 0$$

MORALE: NON CONVIENE USARE IL DIFF. TOT. (Meglio usare la def.)

(4) vedi file ..

(5) $$f(x,y,z) = (1+xy)\,\ln(1-x \cdot z)$$

ATTENZIONE: DOMINIO DI f ($=A$) $= \{xz<1\}$
(dunque f è definita vicino a $(0,0,0)$)

VOGLIO $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(0,0,0) =$ $\underline{\quad 0 \quad}$

$\dfrac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}(0,0,0) =$ $\underline{\quad -6 \quad}$

USIAMO TAYLOR E CALCOLIAMO $P_6(x,y,z) = P_{6,(0,0,0)}(x,y,z)$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \dots$$

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \leftarrow O(t^4)$$

uso $t = xz$

$$f(x,y,z) = -(1+xy)\left(xz + \frac{x^2z^2}{2} + \frac{x^3z^3}{3} + \underline{o(\|x,y,z\|^?)}\right) = (\ast)$$

$x = O(\|\ \|)$ $\Rightarrow xz = O(\|\ \|^2)$
$z = O(\|\ \|)$

$\Rightarrow o((xz)^3) = o(\|\ \|^6)$

COMMENTO SU $O(\ )$ DICO che $f = O(g)$ se
$\left\|\dfrac{f}{g}\right\| \leq$ costante vicino al punto ..

allora def. positiva $\quad \frac{f}{g}$ ha limite finito

QUESTA SECONDA È PIÙ FORTE ma è TROPPO FORTE

se usassi questo non potrei dire che $x = o(\|(x,y,z)\|)$

$\frac{x}{\|(x,y,z)\|}$ NON HA LIMITE MA HA NORMA ≤ 1

allora $\quad f = o(g)$ e $g = O(h) \Rightarrow f = o(h)$

$f = o(xy)$, $\quad xy = O(\|P\|^2)$

$$\Uparrow$$

$x = O(\|P\|)$

$y = O(\|P\|)$

$\left(f = O(g) \quad f_1 = O(g_1) \Rightarrow f f_1 = O(g g_1) \right)$

$o(\|\|^6)$

$$-(1+xy)\left(xz + \frac{x^2z^2}{2} + \frac{x^3z^3}{3} + o(\|x,y,z\|^3)\right) =$$

$$-\left(xz + \frac{x^2z^2}{2} + \frac{x^3z^3}{3} + x^2yz + \frac{x^3yz^2}{2} + o(\|x,y,z\|^6)\right)$$

$$P_6(x,y,z) = -xz - \frac{x^2z^2}{2} - x^2yz - \frac{x^3z^3}{3} - \underbrace{\frac{x^3yz^2}{2}}$$

NON CI SONO TERMINI DI GRADO 3

$$\Downarrow$$

TUTTE LE DERIVATE 3° sono nulle

$\frac{D^\alpha f(0,0,0)}{\alpha!}$ corrisponde al multiindice $\alpha = (3,1,2)$

$\alpha! = 6 \cdot 2 = 12$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} f(0,0,0) = 0$$

$$\frac{D^\alpha f(P_0)}{\alpha!}(P-P_0)^\alpha$$

$$\frac{1}{12}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}(0,0,0) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}(0,0,0) = -6$$

SALTO L'INTEGRALE CURVILINEO

$\boxed{7}$ $\quad f(x,y) = 2e^{xy-2} - 4x^2 + 2xy - y^2$

OSSERVO CHE LA FORMA QUADRATICA $\Phi(x,y) = -4x^2+2xy-y^2$

è definita negativa, come si vede guardando la sua matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $-4 = a_{11} < 0$ $\det A = 4-1 = 3 > 0$

e quindi $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \Phi(x,y) = -\infty$

TROVARE E CLASSIFICARE i PTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y\, e^{xy-2} - 8x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x\, e^{xy-2} + 2x - 2y$$

FACCIO ANCHE LE DER. II° (per dopo)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 e^{xy-2} - 8 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 e^{xy-2} - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2e^{xy-2} + 2xy\, e^{xy-2} + 2$$

CERCHIAMO I PUNTI CRITICI

$$\begin{cases} -8x + 2y\left(e^{xy-2}+1\right) = 0 \\ 2x\left(e^{xy-2}+1\right) - 2y = 0 \end{cases}$$

LO POSSO VEDERE $\begin{bmatrix} -8 & 2(e^{xy-2}+1) \\ 2(e^{xy-2}+1) & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

DUNQUE o $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ oppure $\det \cdot = 0$ cioè

$$16 = 4\left(e^{xy-2}+1\right)^2 \iff 4 = \left(e^{xy-2}+1\right)^2$$

$$\underbrace{e^{xy-2}+1 = \pm 2} \qquad e^{xy-2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$ ← IMPOSSIBILE

$$e^{xy-2} = 1 \iff xy - 2 = 0 \quad \boxed{xy = 2}$$ ← USO QUESTA CONDIZIONE NEL SISTEMA

$$\begin{cases} -8x + 2y(\quad 2 \quad) = 0 \\ 2x(\quad 2 \quad) - 2y = 0 \\ xy = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \text{TRE PTI} \quad (0,0) \quad \pm(1,2)$$

VEDIAMO LE MATRICI HESSIANE

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -8 & 2e^{-2}+2 \\ 2e^{-2}+2 & -2 \end{bmatrix}$$

$a_{11} < 0$

$\det = 16 - 4(1+e^{-2})^2 > 0$

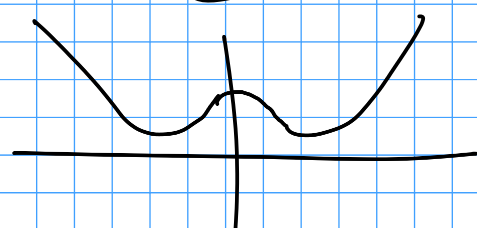
perché $2 > 1 + e^{-2} \iff 1 > \frac{1}{e^2}$

$(0,0)$ <u>pto di massimo</u>

$$H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 - 8 & , \; 2 + 2\cdot 2 + 2 \\ & , \; 2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

SELLA

$f(x,x) \to$



NÉ MAX
NÉ MIN

$f(x,-x) \to$