Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 24 20/11/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Dal compitino 21.11.2020

$\boxed{2}$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenziabile $f = (f_1, f_2)$

$f(0,0) = (-1, 2)$ $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = 3$ $\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = 2$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = -2$ $\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = 5$

Poniamo $h(x,y) = f_1(x,y)^2 - f_2(x,y)^2$

Voglio $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \underline{\ 2\ }$ $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \underline{-24}$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_1^2 - f_2^2\right) = 2f \frac{\partial}{\partial x} f_1 - 2f_2 \frac{\partial}{\partial x} f_2$$

calcolo in $(0,0)$ $\to$ $2f_1(0,0)\frac{\partial}{\partial x}f_1(0,0) - 2f_2(0,0)\frac{\partial}{\partial x}f_2(0,0) = 2(-1)\cdot 3 - 2\cdot 2(-2)$

$-6 + 8 = 2$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_1^2 - f_2^2\right) = 2f_1\frac{\partial f_1}{\partial y} - 2f_2\frac{\partial f_2}{\partial y}$$ che in $(0,0)$ dà:

$$2(-1)2 - 2(2)5 = -4 - 20 = -24$$

Per curiosità posso vedere $h = g \circ f$ dove $g(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta^2$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Allora $J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad J_g(\xi,\eta) = [2\xi \;\; -2\eta]$

$f(0,0) = (-1, 2)$ $\quad J_g(-1,2) = [-2, -4]$

Per il teorema di composizione:

$$J_h(0,0) = J_g(-1,2)\, J_f(0,0) = [-2, -4] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = [(-2)\cdot 3 + (-4)(-2), (-2)2 + (-4)5]$$

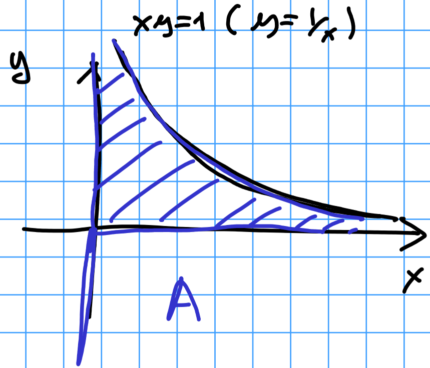
$$= [2, -24]$$

D'altra parte $J_h(x,y) = \left[\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right]$

$\boxed{3}$

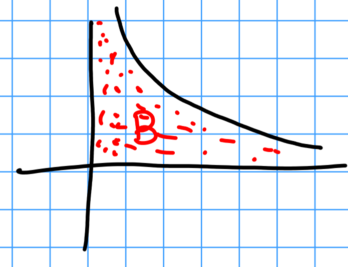
$A = \{(x,y) : 0 \le xy \le 1, 0 \le x\}$

$B = \{(x,y) : 0 < xy < 1, 0 \le x\}$



· A è limitato? $\boxed{NO}$: per esempio i punti $(n, 1/n)$ sono in A e la loro norma vale $\sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \to \infty$

OPPURE I PUNTI $(0,n)$ o $(n,0)$ sono in A e hanno norma "grande e piccola"



A è chiuso $\boxed{SI}$

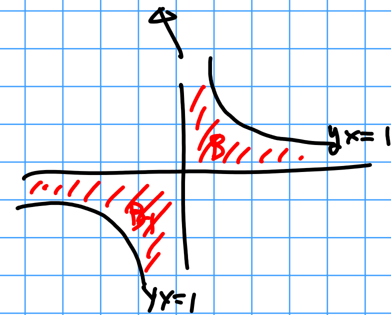
Infatti le funzioni $g(x,y) = xy$ e $h(x,y)$ sono continue e

$$A = \underbrace{\{g \ge 0\}}_{\text{chiuso perché } g \text{ è continua}} \cap \underbrace{\{g \le 1\}} \cap \underbrace{\{h \ge 0\}}_{\text{chiuso perché } h \text{ è continua.}}$$ (intersezione di chiusi!!)

B è aperto?? $\boxed{SI}$ In effetti

$\{g>0\}$ e $\{g<1\}$ sono aperti $\Rightarrow$ $\{0<g<1\}$ è aperto
(intersezione di aperti) $\quad \overset{\shortparallel}{\{0<xy<1\}}$

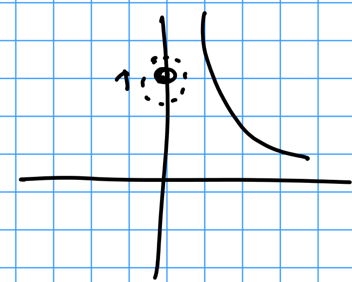
$\{h\geq 0\}$ non è aperto <u>PERÒ</u>
$\{h>0\}$ è aperto e



$B=\{g>0\}\cap\{g<1\}\cap\{h\geq 0\} =$
$\underbrace{\{g>0\}\cap\{g<1\}}_{\text{INTERSEZIONE DI APERTI}}\cap\{h>0\}$ (se $xy>0$ x non può fare zero)

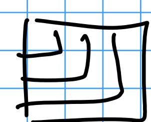
• IL PUNTO $(0,1)$ è ??

<u>DI FRONTIERA</u> per A



• A matrice 4×4 $\qquad A_1, A_2, A_3, A_4$ i minori principali dominanti

$A_1=[a_{11}]$
$\vdots$
$A_4=A$



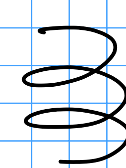
Che condizione dobbiamo verificare per avere $A>0$

$\det A_1>0 \quad \det A_2>0 \quad \det A_3>0 \quad \det A_4>0$

Che condizioni per $A<0$??

$\det A_1<0 \quad \det A_2>0 \quad \det A_3<0 \quad \det A_4>0$

$\boxed{4}$ Considero la curva $\gamma(t)=(\sin(t), \cos(t), -2t)$
Domande: $\qquad 0\leq t\leq \pi$



• γ è chiusa <u>NO</u> $\quad \gamma(0)=(0,1,0) \neq \gamma(\pi)=(0,-1,-2\pi)$

- γ' ha modulo costante ? $\boxed{SI}$

$\gamma'(t) = (\cos(t), -\sin(t), -2)$ $\quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\cos^2(t) + (-\sin(t))^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{5}$

- $\gamma(t)$ è perpendicolare a $\gamma'(t)$?

$\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = (\sin(t), \cos(t), -2t) \cdot (\cos(t), -\sin(t), -2) =$

$\sin(t)\cos(t) - \sin(t)\cos(t) + 4t = 4t$

$\boxed{NO}$ $\quad (\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ solo se $t = 0)$

- Lunghezza di γ:

$$\int_0^{\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{5} \, dt = \pi\sqrt{5}$$

ULTIMO ESERCIZIO

$$f(x,y) = -9x^3 + y^4 + 24xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -27x^2 + 24y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 24x$$

PTI STAZIONARI: devo risolvere

$$\begin{cases} -27x^2 + 24y = 0 \\ 24x + 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -9x^2 + 8y = 0 \\ 6x + y^3 = 0 \end{cases} \qquad 6x = -y^3 = -\left(\frac{9}{8}x^2\right)^3 = \frac{-9^3}{8^3}x^6$$

$x = 0$ oppure $\quad x^5 = \frac{-8^3 \cdot 6}{9^3} = \frac{-2^{10} \cdot 3}{3^6} = -\frac{2^{10}}{3^5} \iff x = -\frac{2^2}{3} = -\frac{4}{3}$

DUE PTI CRITICI $\quad (0,0) \quad \left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

$$y = \frac{9x^2}{8} = \frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2$$

Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -54x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24$$

$$H_g(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{sello}$$

$$H_g\left(-\frac{4}{3}, 2\right) =$$