Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 23 15/11/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

__Teorema__ $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto, f di classe C^2; $x_0 \in A$.

$\nabla f(x_0) = \vec{0}$. Allora

(a) Se $Hf(x_0) > 0 \implies x_0$ è pto di minimo locale (stretto)

(b) Se $Hf(x) < 0 \implies x_0$ e pt. di massimo locale.

CONDIZIONI SUFFICIENTI perché x_0 sia di max/min loc.

~ VICEVERSA ~

(a') Se x_0 è di minimo locale $\implies Hf(x_0) \geq 0$

(b') Se x_0 è di massimo locale $\implies Hf(x_0) \leq 0$

CONDIZIONI NECESSARIE . — . . . .

__Dim__ Faccio il caso del minimo.

(a) Suppongo che $Hf(x_0) > 0$. Per una proprietà vista:

$$\exists\, \nu > 0 \quad \text{tale che} \quad Hf(x_0)(\vec{v}^2) \geq \nu \|\vec{v}\|^2 \quad \leftarrow$$

$$\left(\nu = \min_{\|\vec{v}\|=1} Hf(x_0)(\vec{v}, \vec{v}) \right)$$

Uso Taylor con resto di Peano, in x_0, con ordine $m=2$:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{=0} \cdot (x - x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} Hf(x_0)(x-x_0)^2}_{\geq \frac{\nu}{2}\|x-x_0\|^2} + \underbrace{R_2(x-x_0)}_{\sigma(x)\|x-x_0\|^2}$$

dove $R_2(x-x_0)$ e posso scrivere $\sigma(x)\|x-x_0\|^2$ e
$\sigma(x)\to 0$ per $x\to x_0$. Allora

$$f(x)-f(x_0)\geq \|x-x_0\|^2\left(\frac{\nu}{2}+\sigma(x)\right)$$

Ma dato che $\sigma(x)\to 0$ posso trovare $r>0$ tale che
$B(x_0,r)\subset A$, $\sigma(x)<\frac{\nu}{4}$ $\forall x\in B(x_0,r)$.

DUNQUE se prendo in $B(x_0,r)$

$$f(x)-f(x_0)\geq \|x-x_0\|^2\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\nu}{4}\right)=\frac{\nu}{4}\|x-x_0\|^2$$

Ne segue che x_0 è di minimo stretto in $B(x_0,r)$.

(2') Suppongo che x_0 sia punto di min locale.

Fisso $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ e considero $\varphi(t)=f(x_0+t\vec{v})$

Allora $t=0$ è punto di minimo locale per φ.

Per Analisi 1, $\varphi'(0)=0$ e $\varphi''(0)\geq 0$.

$$\left(\varphi'(0)=\nabla f(x_0)\vec{v}\right)\qquad \varphi''(0)=f''(x_0)(\vec{v}^{\,2})=Hf(x_0)(\vec{v})\cdot\vec{v}$$

DUNQUE $\left(Hf(x_0)\vec{v}\right)\vec{v}\geq 0$ $\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ $\iff$ $Hf(x_0)\geq 0$.

ESEMPIO

VOGLIO TROVARE I PTI STAZIONARI DI f E CLASSIFICARLI

$$f(x,y)=e^{2-xy}+\underbrace{4x^2-3xy+y^2}_{\text{forma quadratica con matrice } A=\begin{bmatrix}4&-3/2\\-3/2&1\end{bmatrix}}$$

$$=e^2e^{-xy}$$

$A>0$ perché $a_{11}=4>0$ $\det A=4-\frac{9}{4}>0$

I DUE ADDENDI "COMPETONO" (VICINO ALL'ORIGINE)

Cerchiamo i punti stazionari studiando il sistema $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-ye^{2-xy}+8x-3y,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-xe^{2-xy}-3x+2y.$$

$$\begin{cases} 8x - (e^{2-xy}+3)y = 0 \\ -(e^{2-xy}+3)x + 2y = 0 \end{cases}$$

$8x = (e^{2-xy}+3)y = (e^{2-xy}+3)(e^{2-xy}+3)\dfrac{x}{2}$

$16x = (e^{2-xy}+3)^2 x$

$\nearrow \; x = 0$

$\searrow \; 16 = (e^{2-xy}+3)^2 \Leftrightarrow \overbrace{e^{2-xy}}^{4 \text{ (se } xy=2)} + 3 = \pm 4$

$\Leftrightarrow e^{2-xy} = \begin{cases} 1 \\ -7 \leftarrow \text{IMPOSS.} \end{cases}$

DUNQUE HO $x=0$ oppure $2-xy=0 \Leftrightarrow xy=2$

Se $x=0$ dal sistema ottengo $y=0$ $\rightsquigarrow$ $(0,0)$

Se $x \neq 0$, metto nel sistema $xy=2$ (dunque l'esponenziale fa 1)

$$\left.\begin{cases} 8x - 4y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \\ xy = 2 \end{cases}\right\} \text{sono equivalenti}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 = 2, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1$$

$\pm(1, 2)$

IN TUTTO TROVO TRE PUNTI CRITICI $(0,0)$ $\pm(1,2)$

Calcoliamo gli Hessiani:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y e^{2-xy} + 8x - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x e^{2-xy} - 3x + 2y$$

calcoli in $(1,2)$:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{2-xy} + 8 \leftarrow 4+8=12, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{2-xy} + 2 \leftarrow 1+2=3 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \underbrace{-e^{2-xy} + xy\, e^{2-xy} - 3}_{-1+2-3=-2} \end{array}\right] \text{derivate seconde}$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & -e^2-3 \\ -e^2-3 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det H_f(0,0) < 0$

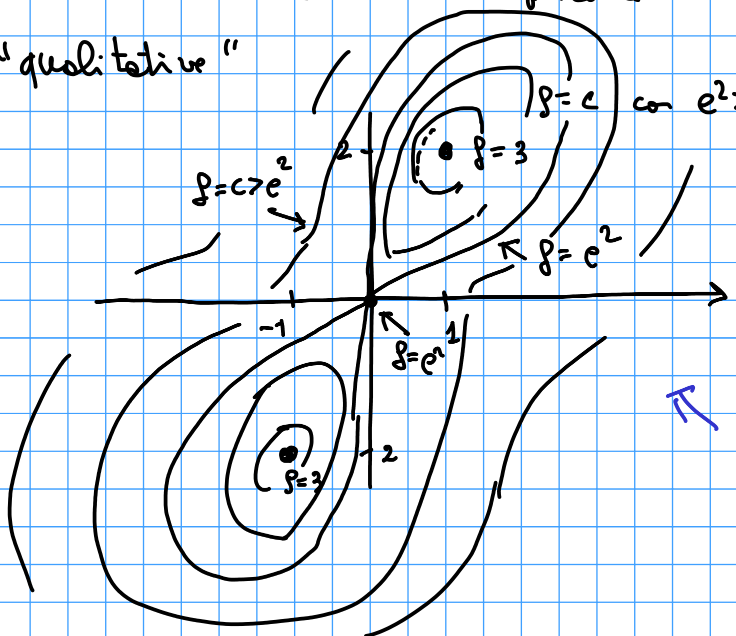
$= 16 - (e^2+3)^2 < 16 - 7^2 = 16 - 49 < 0$

$(0,0)$ PUNTO DI SELLA

$$H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} a_{11} = 12 > 0 \\ \det = 36 - 4 > 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{PUNTO DI MINIMO} \\ \text{(STRETTO)} \end{array}$$

$H_f(-1,-2)$ . . . . PUNTO DI MINIMO (la matrice Hessiana è la stessa)

Posso visualizzare il comportamento di f mediante delle linee di livello "qualitative"



$f(0,0) = e^2 \quad (> 4 > 3)$

$f(1,2) = f(-1,-2) =$

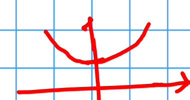
$1 + 4 - 6 + 4 = 3$

VIENE DA DOMANDARSI SE 3 è il minimo ASSOLUTO DI f

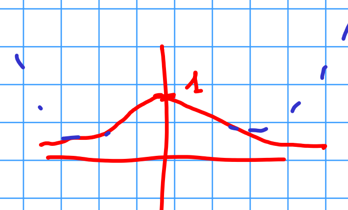
• MA POSSO DIRE CHE f HA MINIMO?? LO POSSO DIRE SE trovo che $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$

OSS. Se guardo solo il termine $g(x,y) = e^{2-xy}$ vedo che ho solo il punto stazionario $(0,0)$ in cui c'è una sella

Nella direzione $y = -x$ $\quad g(x,-x) = e^{2+x^2} \to +\infty$



Nella direzione $y = x$ $\quad g(x,x) = e^{2-x^2}$



Se aggiungo $h(x,y) = 4x^2 - 3xy + y^2$ ← ha solo un minimo in $(0,0)$.

Se li combino e faccio i calcoli come abbiamo fatto sopra.

in $(0,0)$ rimane una sella

LA DECOMPOSIZIONE $$f(x,y) = \underbrace{e^{2-xy}}_{g(x,y)\geq 0\,!!} + \underbrace{4x^2-3xy+y^2}_{h(x,y)}$$

mostra che $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) \geq \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} h(x,y) = +\infty$ (perché la forma quadratica è >0)

DUNQUE, per Weierstrass generalizzato, f HA MINIMO.

Ma allora deve esistere (x_0,y_0) punto di minimo e deve essere

$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ cioè (x_0,y_0) è uno dei punti $(0,0)$ $\pm(1,2)$

MA $(0,0)$ NON PUÒ ESSERE (SELLA!) $\Rightarrow$ $(x_0,y_0) = \pm(1,2)$

$$\Rightarrow \quad \min f(x,y) = 3$$

Viceversa f non ha massimo dato (NON CI SONO PUNTI DI MASSIMO LOCALE ~ oppure vedo facilmente che $f(x,x)\to+\infty$ ...)

Dal compitino del 2020

DOMANDA 1

$$\boxed{f(x,y) = 2(1+2x+y)e^{1+2xy}}. \qquad P_0 = (-1,1)$$

(a) Calcoliamo $P_{3,P_0} = P(x,y)$ scritto rispetto a $(x+1)$ e $(y-1)$

$$P(x,y) = c_{0,0} + c_{1,0}(x+1) + c_{0,1}(y-1) + c_{2,0}(x+1)^2 + c_{1,1}(x+1)(y-1)$$
$$+ c_{0,2}(y-1)^2 + c_{3,0}(x+1)^3 + c_{2,1}(x+1)^2(y-1) + c_{1,2}(x+1)(y-1)^2 + c_{0,3}(y-1)^3$$

VOGLIO tutti questi coeff. c.

Potrei usare la formula usando le derivate di f in P_0 (fino alle derivate terze ...). USIAMO il calcolo degli o piccoli per evitare i calcoli delle derivate.

CONVIENE RIPORTARE IL PROBLEMA IN (0,0). Scrivo $x = -1+\xi$ $y = 1+\eta$

$$f(-1+\xi,\ 1+\eta) = 2\left(1+2(-1+\xi)+1+\eta\right)e^{1+2(\xi-1)(\eta+1)} =$$

$1+2(\xi\eta-\eta+\xi-1)$

$$2(2\xi+\eta)e^{-1+2\xi-2\eta+2\xi\eta} =: g(\xi,\eta)$$

Cerco $P_{3,0}$ della g (in questo modo dovo tutti i c_{ij})

$$g(\xi,\eta) = 2\underbrace{(2\xi+\eta)}_{O(\|\xi,\eta\|)}e^{-1+2\xi-2\eta+2\xi\eta}$$

mi serve il polinomio P_2 di questo pezzo

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+O(t^3) \qquad t = -1+2\xi-2\eta+2\xi\eta$$

questo t non tende a zero!!

$$e^{-1+2\xi-2\eta+2\xi\eta} = 1+(-1+2\xi-2\eta+2\xi\eta)+\frac{1}{2}(-1+2\xi-2\eta+2\xi\eta)^2+$$

$$O(-1$$

DA CAPO. RISCRIVO g:

$$g(\xi,\eta) = 2(2\xi+\eta)e^{-1}e^{2\xi-2\eta+2\xi\eta}$$

Scrivo lo sviluppo di $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+O(t^3)$

e prendo $t = 2\xi-2\eta-2\xi\eta \implies$

$$\underbrace{e^{2\xi-2\eta+2\xi\eta}}_{g(\xi,\eta)} = 1+(2\xi-2\eta+2\xi\eta)+\frac{1}{2}(2\xi-2\eta+\xi\eta)^2+$$

$$O\left((2\xi-2\eta+2\xi\eta)^3\right) =$$

$$1+2\xi-2\eta+2\xi\eta+\frac{1}{2}\Big(4\xi^2+4\eta^2+\underbrace{\xi^2\eta^2}_{O(\|\xi,\eta\|^4)}-8\xi\eta+\underbrace{4\xi^2\eta-4\xi\eta^2}_{O(\|\cdot\|^3)}\Big)+$$

$$O(\|(\xi,\eta)\|^3)$$

Perché $\xi = O(\|(\xi,\eta)\|)$ $\eta = O(\|\xi,\eta\|)$

$\xi\eta = O(\|\xi,\eta\|^2)$

$$=1+2\xi-2\eta+2\xi\eta+2\xi^2+2\eta^2-4\xi\eta+\underbrace{O(\|(\xi,\eta)\|^3)}_{o(\|(\xi,\eta)\|^2)}$$

MOLTIPLICO PER $2(2\xi+\eta)$:

$$g(\xi,\eta)=e^{-1}2(2\xi+\eta)\left(1+2\xi-2\eta-2\xi\eta+2\xi^2+2\eta^2+O(\|(\xi,\eta)\|^3)\right)=$$

$$e^{-1}2\Big(2\xi+4\xi^2-4\xi\eta-4\xi^2\eta+4\xi^3+4\xi\eta^2+\eta+2\xi\eta-2\eta^2-2\xi\eta^2+2\xi^2\eta+2\eta^3+O(\|(\xi,\eta)\|^4)\Big)=$$

$$\frac{2}{e}\left(2\xi+\eta+4\xi^2-2\xi\eta-2\eta^2+4\xi^3-2\xi^2\eta+2\xi\eta^2+2\eta^3\right)+o(\|(\xi,\eta)\|^3)$$

$C_{00}=0$, $C_{10}=\frac{4}{e}$, $C_{01}=\frac{2}{e}$, $C_{20}=\frac{8}{e}$, $C_{11}=-\frac{4}{e}$, $C_{01}=-\frac{4}{e}$, $C_{30}=\frac{8}{e}$

$C_{21}=-\frac{4}{e}$ $C_{12}=\frac{4}{e}$ $C_{03}=\frac{4}{e}$

(b) TROVIAMO $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(P_0) = 6C_{3,0}=\dfrac{24}{e}$ e $\dfrac{\partial^3 f(P_0)}{\partial x\partial y^2}$.

So che $C_{3,0}=\dfrac{D^{(3,0)}f(P_0)}{(3,0)!}=\dfrac{1}{3!0!}\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}f(P_0)=\dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}f(P_0)$

Mentre $C_{1,2}=\dfrac{D^{(1,2)}f(P_0)}{(1,2)!}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}f(P_0) \Rightarrow \dfrac{\partial^3 f(P_0)}{\partial x\partial y^2}=2C_{12}=\dfrac{8}{e}$