Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 22 14/11/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Visto ieri

$$(*) \qquad f^{(n)}(x_0)(\vec{v}^{\,n}) = \underbrace{\sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_n=1}^{N}}_{N^n \text{ addendi} - \text{ con varie ripetizioni}} \frac{\partial^n}{\underbrace{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}_{n}} f(x_0)\, v_{i_1} \cdots v_{i_n}$$

Volevo scrivere la formula sopra usando

$$\frac{\partial^n}{\underbrace{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_N^{m_N}}_{N \ (\leq N)}}$$

$$m_1 + \cdots + m_N = n$$

N - MULTI INDICE

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ dove $\alpha_i \in \mathbb{N}$ (con lo zero)

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$

$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$ $\quad (0! = 1)$

$\vec{v}^{\,\alpha} = v_1^{\alpha_1} \cdot v_2^{\alpha_2} \cdots v_N^{\alpha_N}$

$$D^\alpha f(x) = \underbrace{\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}} f(x)$$

FATTO

$$\boxed{f^{(n)}(x_0)(\vec{v}, \ldots \vec{v}) = f^{(n)}(x_0)(\vec{v}^{\,n}) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)\, \vec{v}^{\,\alpha}} \qquad (**)$$

Idea: $\frac{n!}{\alpha!}$ conta il numero di volte in cui il termine $D^\alpha f(x)\,\vec{v}^{\,\alpha}$ compare nella formula (★)

OSS. $\boxed{\frac{n!}{\alpha!}}$ conta il numero di "PARTIZIONI" di un insieme A contenente n elementi in N sottoinsiemi $A_1 \dots A_N$ tali che $\#A_1=\alpha_1 \;\dots\; \#A_N=\alpha_N$

Nel caso $N=2$ $\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$: $\alpha_1+\alpha_2=n$

$$\frac{n!}{\alpha!}=\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!}=\frac{n!}{\alpha_1!\,(n-\alpha_1)!}=\binom{n}{\alpha_1} \leftarrow \text{CONTA IL}$$

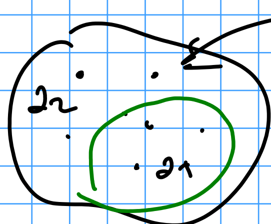
NUMERO DI SOTTOINSIEMI DI A aventi α_1 elementi

(= il numero di sottoinsiemi aventi $\alpha_2=n-\alpha_1$ elementi)

$N=2$

(α_1,α_2)

$\alpha_1+\alpha_2=n$



n elementi

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

PER ESEMPIO CONSIDERIAMO $N=3$ $\quad n=4$

$$f^{(IV)}(x_0)(\vec{v}^{\,4})=\sum_{|\alpha|=4}\frac{4!}{\alpha!}D^\alpha f(x_0)\,\vec{v}^{\,\alpha}$$

$v=(v_x,v_y,v_z)$

(v_1,v_2,v_3)

Chi sono gli α?

					$\frac{4!}{\alpha!}$
(A)	$(4,0,0)$	$(0,4,0)$	$(0,0,4)$	$\alpha!=4!=24$	1
(B)	$(3,1,0)$	$(3,0,1)$	$(0,3,1)$	$\alpha!=3!=6$	4
	$(1,3,0)$	$(1,0,3)$	$(0,1,3)$		
(C)	$(2,2,0)$	$(2,0,2)$	$(0,2,2)$	$\alpha!=2!2!=4$	6
(D)	$(2,1,1)$	$(1,2,1)$	$(1,1,2)$	$\alpha!=2!=2$	12

DUNQUE $\quad f^{(IV)}(x_0)(\vec{v}^{\,4})=\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x_0)\,v_x^4+\frac{\partial^4}{\partial y^4}f(x_0)\,v_y^4+\frac{\partial^4}{\partial z^4}f(x_0)\,v_z^4+$

$$+ 4\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} f(x_0)\, v_x^3 v_y + 4\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial z} f(x_0)\, v_x^3 v_z + 4\frac{\partial^4}{\partial y^3\partial z} f(x_0)\, v_y^3 v_z +$$

$$+ 4\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3} f(x_0)\, v_x v_y^3 + 4\frac{\partial^4}{\partial x\partial z^3} f(x_0)\, v_x v_z^3 + 4\frac{\partial^4}{\partial y\partial z^3} f(x_0)\, v_y v_z^3 +$$

$$+ 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} f(x_0)\, v_x^2 v_y^2 + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2} f(x_0)\, v_x^2 v_z^2 + 2\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2} f(x_0)\, v_y^2 v_z^2 +$$

$$+ 12\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y\partial z} f(x_0)\, v_x^2 v_y v_z + 12\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^2\partial z} f(x_0)\, v_x v_y^2 v_z + 12\frac{\partial^4}{\partial x\partial y\partial z^2} f(x_0)\, v_x v_y v_z^2$$

RICORDIAMO ANCHE CHE, se $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$ allora

$$\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(x_0 + t v)(\vec{v}^{\,n}) \quad \text{(quello che ho calcolato sopra)}$$

$$\varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)(\vec{v}^{\,n}) = \dots$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE $n \in \mathbb{N}$

$f : A \to \mathbb{R}$ A aperto CONVESSO $x_0 \in A$ f di classe C^{n+1}

ALLORA, per ogni $x \in A$ esiste $\xi_{x_0,x}$ sul segmento tra x_0 e x tale che

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$$

dove P_{n,x_0} è il Polinomio di Taylor di ordine n, rispetto a x_0

che è definito da

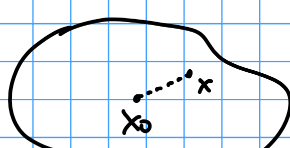
$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{|\alpha|\le n} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

mentre

$$R_{n,x_0}(x) = \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{D^\alpha f(\xi_{x_0 x})}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

Dim. Fisso $x \in A$. Considero $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ $0 \le t \le 1$

(guardo f sul segmento tra x_0 e x)



Scrivo lo sviluppo di Taylor di φ rispetto a $t_0 = 0$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)\,t + \dots + \frac{\varphi^{(n)}}{n!} t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} t^{n+1}$$

dove $\tau \in (0, t)$ (Analisi 1)

IN PARTICOLARE POSSO PRENDERE $t = 1$

$$f(x) = \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} \qquad 0 < \tau < 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} = (\text{uso } \cancel{\#\#})$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\cancel{k!}} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\cancel{k!}}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha}_{} + \frac{1}{\cancel{(n+1)}!} \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{\cancel{(n+1)}!}{\alpha!} D^\alpha f(x_0 + \tau(x-x_0)) \cdot (x-x_0)^\alpha$$

$$\underbrace{\sum_{|\alpha|\le n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha}_{P_{n,x_0}(x)} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=n+1} \frac{D^\alpha f(\overbrace{x_0 + \tau(x-x_0)}^{\xi_{x,x_0}})}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha}_{R_{n,x_0}(x)}$$

FORMULA DI T. con resto di PEANO

A aperto (non mi serve convesso)

f di classe C^n

Allora

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$$ ← MI DÀ INFORMAZIONI PER X VICINO A x_0

dove $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \frac{|R_{n,x}(x)|}{\|x-x_0\|^n} = 0 \qquad \left(R_{n,x_0}(x) = o(\|x-x_0\|^n) \right)$

__Dim.__ Prendo $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset A$ (A è aperto!)

Prendo $x \in B(x_0, r)$ (che è convesso, dunque posso usare il resto di L.)

$$\Rightarrow f(x) = P_{n-1,x_0}(x) + \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi_{x_0,x})(x-x_0)^\alpha \quad (\xi_{x_0,x} \text{ come prima})$$

(aggiungo e tolgo ...)

$$= P_{n,x_0}(x) + \underbrace{\sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!}\left(D^\alpha f(\xi_{x_0,x}) - D^\alpha f(x_0)\right)(x-x_0)^\alpha}_{R_{n,x_0}(x)}$$

$$\text{Vorremo} \quad \left|\frac{R_{n,x_0}(x)}{\|x-x_0\|^n}\right| \le \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\left|D^\alpha f(\xi_{x_0,x}) - D^\alpha f(x_0)\right|}_{\substack{\text{tende a zero} \\ \text{se } x\to x_0 \Rightarrow \xi_{x,x_0}\to x_0}} \overbrace{\left|\frac{(x-x_0)^\alpha}{\|x-x_0\|^n}\right|}^{\le 1}$$

è chiaro che

$$\left|\frac{(x-x_0)^\alpha}{\|x-x_0\|^n}\right| = \frac{|x_1-x_{0,1}|^{\alpha_1}}{\|x-x_0\|^{\alpha_1}} \cdots \frac{|x_N-x_{0,N}|^{\alpha_N}}{\|x-x_0\|^{\alpha_N}} =$$

$\alpha_1 + \dots \alpha_N = n$

$$\Big|\underbrace{\frac{x_1-x_{0,1}}{\|x-x_0\|}}_{\le 1}\Big|^{\alpha_1} \cdots \Big|\underbrace{\frac{x_N-x_{0,N}}{\|x-x_0\|}}_{\le 1}\Big|^{\alpha_N} \le 1 \quad !!$$

per esempio

$$\left|\frac{(x,y,z)^{(1,2,1)}}{\|(x,y,z)\|^4}\right| = \frac{|x|^1 \, |y|^2 \, |z|}{\|(x,y,z)\|^4} = \frac{|x|}{\|(x,y,z)\|}\left|\frac{|y|}{\|xyz\|}\right|^2 \left|\frac{z}{\|xyz\|}\right|$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge \qquad\quad \wedge \qquad\quad \wedge$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \qquad\quad 1 \qquad\quad 1$

DUNQUE $\qquad R_{n,x_0}(x) = o(\|x-x_0\|^n)$

ESEMPIO (di sviluppo di Taylor)

$f(x,y,z) = e^{xy+z}$, punto base $= (0,0,0)$ $\qquad$ cerchiamo $P_3(x,y,z)$
$P_{3,(0,0,0)}$

MI SERVONO TUTTE LE DERIVATE FINO ALL'ORDINE $m=3$, calcolate in $(0,0,0)$

- $f(0,0,0) = 1$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy+z}) = e^{xy+z}\frac{\partial}{\partial x}(xy+z) = e^{xy+z}y$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy+z}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 0$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{xy+z}$

  $\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy+z}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy+z}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = 0$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^{xy+z}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0) = 1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy+z}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy+z} + xy\, e^{xy+z}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) = 1$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y e^{xy+z}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x e^{xy+z}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0) = 0$

- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0) = 0$ $\quad \dfrac{\partial^3}{\partial y^3} f(0) = 0$ $\quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3}(0) = 1$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0) = 0$ $\quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(0) = 0$, $\quad \dfrac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z}(0) = 0$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0) = 0$ $\quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(0) = 0$ $\quad \dfrac{\partial^3}{\partial y \partial z^2}(0) = 0$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xy+z} + xy\, e^{xy+z}$ $\quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} f(0) = 1$

$$\Rightarrow e^{xy+z} = \underbrace{1}_{\text{grado zero}} + \underbrace{z}_{\text{grado 1}} + \underbrace{xy + \frac{1}{2} z^2}_{\text{grado 2}} + \underbrace{xyz + \frac{1}{6} z^3}_{\text{grado 3}} + o(\|(x,y,z)\|^3)$$

HO APPLICATO LA FORMULA.

OSS. IN REALTÀ SO ANCHE CHE P_{n,x_0} È L'UNICO polinomio P di grado $\le n$ per cui vale

$$f(x) = P(x) + o(\|x - x_0\|^n)$$

Vediamo se riesco a trovare P_3, dell'esercizio di prima, usando "gli sviluppi noti" e l'unicità di P_{n,x_0}

TORNIAMO DUNQUE A $\quad f(x,y,z) = e^{xy+z}$

Ricordiamo che $\quad e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \dots + \dfrac{t^n}{n!} + \begin{cases} o(t^n) \\ O(t^{n+1}) \end{cases}$ (Analisi 1)

$\dfrac{O(t^{n+1})}{t^{n+1}}$ è limitato

$$\Rightarrow f(x,y,z) = 1 + (xy+z) + \frac{(xy+z)^2}{2} + \dots + \frac{(xy+z)^n}{n!} + O(\underbrace{|xy+z|^{n+1}})$$

DOVE MI DEVO FERMARE PER AVERE CHE LA PARTE TRASCURATA È $o(\|x,y,z\|^3)$

NOTA: $xy+z = O(\|x,y,z\|)$ cioè $\frac{xy+z}{\|x\,y\,z\|} \leq$ costante se $(x,y,z) \simeq (0,0,0)$

INFATTI $|xy+z| \leq |xy| + |z| \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + |z| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{|xy+z|}{\|(x\,y\,z)\|} \leq \frac{1}{2}\|x,y,z\| + 1$$ ← limitato vicino a $(0,0,0)$

CIOÈ $xy+z = O(\|x\,y\,z\|)$

Allora $O(|xy+z|^{n+1}) = O(\|x,y,z\|^{n+1})$

INFATTI $\frac{O(|xy+z|^{n+1})}{\|x\,y+z\|^{n+1}}$ limitato $\Rightarrow$

$$\frac{O(|xy+z|^{n+1})}{\|x,y,z\|^{n+1}} = \frac{O(|xy+z|^{n+1})}{|xy+z|^{n+1}} \left|\frac{xy+z}{\|x\,y\,z\|}\right|^{n+1}$$

limitato

Per avere $o(\|x,y,z\|^3)$ posso prendere $n+1=4$ cioè $n=3$

DUNQUE

$$f(x,y,z) = 1 + (xy+z) + \frac{1}{2}(xy+z)^2 + \frac{1}{6}(xy+z)^3 + \underbrace{O(\|x,y,z\|^4)}_{= o(\|x\,y\,z\|^3)} =$$

ordine 4

$$1 + xy + z + \frac{1}{2}(x^2y^2 + z^2 + 2xyz) + \frac{1}{6}(x^3y^3 + z^3 + 3x^2y^2z + 3xyz^2)$$

$$+ o(\|x\,y\,z\|^3) =$$

$$1 + xy + z + \frac{1}{2}z^2 + xyz + \frac{1}{6}z^3 + o(\|x\,y\,z\|^3)$$

CHE TORNA CON IL CALCOLO DIRETTO

HO USATO IL FATTO CHE $x = O(\|xyz\|) = y$

$$\left.\begin{aligned} x^2y^2 &= O(\|(x,y,z)\|^4) = o(\|(x,y,z)\|^3) \\ \rightarrow\quad x^3y^3 &= O(\|(x,y,z)\|^6) = o(\|(x,y,z)\|^3) \\ x^2y^2z &= O(\|(x,y,z)\|^5) = o(\|(x,y,z)\|^3) \\ xyz^2 &= O(\|(x,y,z)\|^4) = o(\|(x,y,z)\|^3) \end{aligned}\right\}$$

li ho buttati nel resto !!

COSA HO USATO IN DEFINITIVA ?

- Lo sviluppo di e^t
- IL CALCOLO DEGLI INFINITESIMI, notando che

se $P = (x_1 \dots x_N)$ $\qquad x_i = O(\|P\|) \qquad (|x_i| \le \|P\|\ !!)$

OSS. Se mi fermo all'ordine 2, il polinomio di Taylor si scrive come

$$P_2(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\Big(Hf(x_0)(x-x_0)\Big)\cdot(x-x_0)}_{\text{FORMA QUADRATICA ASSOCIATA A } Hf(x)}$$

TEOREMA (Classificazione dei pti critici – CONDIZIONI SUFFICIENTI)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad$ A aperto di $\mathbb{R}^N$ $\quad$ f di classe C^2

$x_0 \in A$ sia un punto critico, cioè $\nabla f(x_0) = 0$

Allora se

$Hf(x_0) > 0$ (definita positiva) $\Rightarrow$ x_0 è pto di minimo locale

$Hf(x_0) < 0$ (" negativa) $\Rightarrow$ x_0 è pto di massimo locale

Se $\det Hf(x_0) \neq 0$, $Hf(x_0)$ ha almeno un autovalore $\lambda > 0$ e almeno un autovalore $\mu < 0$

$\Rightarrow$ x_0 è PUNTO DI SELLA

(C'è una decomposizione di $\mathbb{R}^N$ in due sottospazi X_1 e X_2

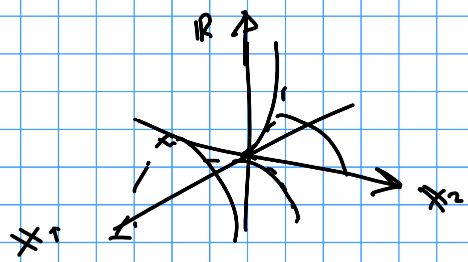
$\mathbb{R}^N = X_1 \oplus X_2 \qquad X_1 \perp X_2 . \qquad \dim X_1 > 0, \dim X_2 > 0$

La restrizione $f|_{X_1}$ ha un minimo locale in x_0

La restrizione $f|_{X_2}$ ha un max loc. in x

$\simeq$ vicino a x_0 $\quad f(x) = f(\underset{X_1}{\underset{\cap}{x'}}, \underset{X_2}{\underset{\cap}{x''}}) \simeq c_1 \|x_1\|^2 - c_2 \|x_2\|^2$)

$c_1 > 0 \quad c_2 > 0$)



CALCOLI SPARSI

$\cancel{f} \rightarrow f'$

$f(t) = 3t^2 - t^3 \qquad f'(t) = 6t - 3t^2$

$\frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$

$f(x_0 + t\vec{v})'$

$f(x,y) = xy \qquad v = (1,-1) \qquad P_0 = (1,1)$

$f(\underbrace{P_0 + t\vec{v}}_{(1+t,\ 1-t)}) = \qquad (1+t)(1-t) = 1-t^2 \quad \frac{d}{dt} f(P_0+tv) = \frac{d}{dt}(1-t^2) = -2t$

$\frac{d^2}{dt^2} f(P_0+tv) = \frac{d^2}{dt^2}(1-t^2) = -2$

$$\gamma(t) = (1 + 2\cos(t),\ 1 + 2\sin(t))$$

$$\gamma'(t) = (-2\sin(t),\ 2\cos(t))$$

$$\vec{f} = (ay,\ bx)$$

$$\int_0^{2\pi} \big(a(1+2\sin(t)),\ b(1+2\cos(t))\big) \cdot \big(-2\sin(t),\ 2\cos(t)\big) =$$

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{-2a\sin(t)}_{0} \underbrace{+2b\cos(t)}_{0} - 4\cdot a\underbrace{\sin^2(t)}_{1-\cos^2(t)} + 4b\cos^2(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -4a + (4a+4b)\cos^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} -4a + (4a+4b)\frac{\cos(2t)+1}{2} =$$

$$\left(-4a + \frac{4a+4b}{2}\right)2\pi = 4\pi(b-a) \ .\ . \qquad ??$$