Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 21 13/11/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$f: A \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^k \dots)$ A aperto di $\mathbb{R}^N$ $x_0 \in A$. $m \in \mathbb{N}$

Derivate di ordine m

Def. Derivate direzionali m-esime. Dati m vettori $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_m \in \mathbb{R}^N$ definisco ricorsivamente la derivata direzionale

$$f^{(m)}(x)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) := \frac{d}{dt} f^{(m-1)}(x_0 + t\vec{v}_1)(\underbrace{\vec{v}_2 \dots \vec{v}_m}_{m-1})\Big|_{t=0}$$

(si deriva $f^{(m-1)}(x_0)(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ nella direzione v_1)

Derivate parziali
$$\frac{\partial^m f(x_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = f^{(m)}(x_0)(\hat{e}_{i_1} \dots \hat{e}_{i_m})$$
$(i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, \dots, N\})$

$$= \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\dots \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} f\right)\right)\dots\Big)(x_0)$$

(ogni derivata è fatta "congelando" le variabili diverse da quella rispetto a cui si deriva)

Per esempio
$$\frac{\partial^4}{\partial x \partial z \partial x \partial y}(x^3 y^3 z) = \frac{\partial^3}{\partial x \partial z \partial x} 3x^3 y^2 z = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} 6 x y^2 z =$$
$$\frac{\partial}{\partial x} 6x y^2 = 6 y^2$$

TEOREMA (Diff tot + Schwartz) Supponiamo che $\exists$ derivate parziali di ordine $\leq n$ $\forall x$ in A e che siano continue in x_0. Allora

(a) $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \longmapsto f^{(n)}(x_0)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ è n-lineare

$$\underbrace{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^N}_{m \text{ fattori}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cioè è lineare rispetto a ogni argomento $(v_1, v_2, \dots v_n)$

(b) inoltre l'applicazione scritta in (a) è simmetrica cioè

$$f^{(n)}(x_0)(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_i \dots \vec{v}_j \dots \vec{v}_m) = f(x_0)(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_j \dots \vec{v}_i \dots \vec{v}_m)$$

(se nella m-upla $(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_m)$ scambio due elementi la corrispondente derivata direzionale rimane la stessa.

DALLA (b) segue che posso indicare le derivate m-esime, mettendo in ordine crescente le variabili rispetto a cui derivo. CIOÈ INDICO

$$\underbrace{\frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_N^{m_N}}}_{N} f(x_0)$$

dove $m_1 \dots m_N \in \mathbb{N}$ (anche zero) tali che $m_1 + \dots + m_N = m$

(m_i indica il numero di volte rispetto a cui derivo in x_i: invece di scrivere

$$\underbrace{\frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}}_{n}$$

scrivo la cosa di sopra

(raggruppo tutti gli indici che fanno 1, tutti quelli che fanno 2 ...)

INVECE DI SCRIVERE $\dfrac{\partial^5}{\partial x \partial z \partial x \partial y \partial z}$ scrivo $\dfrac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y \partial z^2}$

$x = x_1 \quad y = x_2 \quad z = x_3$

<u>OSS.</u> La proprietà (a) implica che le derivate direzionali si possono esprimere mediante le derivate parziali :

Supponiamo che $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n \in \mathbb{R}^N$ e che

$$\vec{v}_i = (v_{i,1}, \dots v_{i,N})$$

Allora

$$(\star)\quad f^{(n)}(x_0)(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n) = \underbrace{\sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_n=1}^{N}}_{n} \frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_n}} \underbrace{v_{1,i_1} \dots v_{n,i_n}}_{\text{componenti dei vettori } \vec{v}_1 \dots \vec{v}_n}$$

(N^n addendi)

Questa formula segue dalla n-linearità delle derivate direzionali, scrivendo $\vec{v}_i = v_{i,1}\hat{e}_1 + \dots v_{i,N}\hat{e}_N \qquad i = 1 \dots n$

e ricordando che

$$\frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = f^{(n)}(x)(\hat{e}_{i_1} \dots \hat{e}_{i_n})$$

Per es. se $n = 3$ la $(\star)$ diventa

$$f'''(x_0)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} f(x_0)\, u_i v_j w_k$$

<u>FATTO</u> Se considero $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$ (dato $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$)

$$\varphi'(t) = \nabla f(x_0 + t\vec{v}) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t\vec{v})\, \vec{v}_i = f'(x_0+t\vec{v})(\vec{v})$$

$$\varphi''(t) = \left(Hf(x_0 + t\vec{v})\vec{v}\right)\cdot\vec{v} = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t\vec{v})\, v_i v_j = f''(x_0+t\vec{v})(\vec{v},\vec{v})$$

IN GENERALE SI HA

$$\varphi^{(n)}(t) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_n=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}}_{} f(x_0 + tv)\, v_{i_1} \dots v_{i_n} \quad \leftarrow$$

N^n addendi

$$= f^{(n)}(x_0 + t\vec{v})(\vec{v}, \vec{v}, \dots, \vec{v})$$

si abbrevia con $f^{(n)}(x_0 + t\vec{v})(\vec{v}^{\,n})$

IN PARTICOLARE

$$\varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0)(\vec{v}^{\,n}) \qquad (\star\star)$$

VORREI ESPRIMERE $f^{(n)}(x_0)(\vec{v}^{\,n})$ usando le derivate nella "forma canonica" $\dfrac{\partial^n}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_N^{m_N}}$

È UTILE INTRODURRE I MULTIINDICI

DEF. Chiamo N-multiindice una N-upla di interi ≥ 0 :

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad \text{dove ogni } \alpha_i \in \mathbb{N} \quad (\text{può essere zero})$$

Dato α N-multiindice si definiscono:

- la "lunghezza di α": $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_N$
- il "fattoriale di α": $\alpha! := \underbrace{\alpha_1! \, \alpha_2! \cdots \alpha_N!}_{\text{Prodotto}}$ $\quad (0! = 1)$
- la "potenza α-esima" di un vettore $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^N$ $\quad \vec{v}^{\,\alpha} := \underbrace{v_1^{\alpha_1} \, v_2^{\alpha_2} \cdot \cdots v_N^{\alpha_N}}_{\text{PRODOTTO}}$ $\quad$ CONVENZIONE: $x^0 := 1$ (anche se $x = 0$)
- la "derivata α-esima" di una funzione f di N var. $\quad D^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^n f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$ $\quad n = |\alpha|$

ESEMPIO $\quad N = 3 \quad \alpha = (1, 3, 2)$

- $|\alpha| = \boxed{6} \quad (1 + 3 + 2 = 6)$
- $\alpha! = 1! \, 3! \, 2! = 1 \cdot 6 \cdot 2 = \boxed{12}$
- $P = (x, y, z)$, $\quad P^\alpha = x \, y^3 z^2$
- Se $f = f(x, y, z)$ $\quad D^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^6 f(x)}{\partial x \, \partial y^3 \, \partial z^2}$