Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 20 08/11/2023

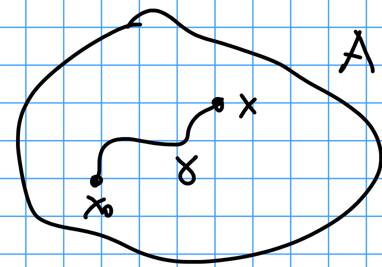
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

(a) f costante $\Rightarrow$ $\nabla f = 0$

(b) $\nabla f = 0$ + A connesso $\Rightarrow$ f costante

Per dim. la (b) faccio così: FISSO $x_0 \in A$. Prendo un generico $x \in A$ e so che posso trovare $\gamma : [0,1] \to A$, C^1, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$. Considero



$$\varphi(t) = f(\gamma(t)) \qquad \begin{aligned} \varphi(0) &= f(x_0) \\ \varphi(1) &= f(x) \end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = \underbrace{\nabla f(\gamma(t))}_{=0} \cdot \gamma'(t) = 0$$

DUNQUE $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ha derivata nulla, dunque φ è costante

$\Rightarrow$ $\varphi(1) = \varphi(0)$ cioè $f(x) = f(x_0)$. Dato che "x è qualunque"

$$f(x) = f(x_0) \quad \forall x \in A$$

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

Def. $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme, $x_0 \in A$.

Dirò che x_0 è punto di massimo relativo / locale per f (minimo) (in A) se esiste un raggio $r > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A \text{ con } \|x - x_0\| < r$$

$$(\geq)$$

Il valore $f(x_0)$ si chiama massimo relativo (minimo)

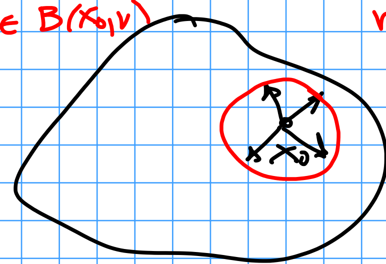
TEOREMA (Fermat in $\mathbb{R}^N$)

Se $\boxed{A \text{ è aperto}}$, $x_0 \in A$, f è derivabile in x_0 (f ha derivate parziali in x_0), x_0 di max/min rel.

$$\Rightarrow \nabla f(x_0)=0 \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=0 \quad i=1 \dots N\right)$$

__Dim.__ Sia x_0 è di massimo rel. in A. Fisso $\vec{v}\in\mathbb{R}^N$ e pongo $\varphi(t):=f(x_0+t\vec{v})$, Allora φ è ben definita su $]-\varepsilon,\varepsilon[$ per un opportuno $\varepsilon>0$. So anche che $f(x)\le f(x_0)$ per $x\in B(x_0,r)$ $r>0$

($x_0+t\vec{v}\in A$ se $|t|$ è piccolo)



DUNQUE $\varphi(t)$ ha massimo rel. in $t=0$

Per A1 $\underset{f'(x_0)(\vec{v})}{\underset{\parallel}{\varphi'(t)}}=0 \iff \nabla f(x_0)\cdot\vec{v}=0$

HO TROVATO DUNQUE $\nabla f(x_0)\cdot\vec{v}=0 \quad \forall\vec{v}\in\mathbb{R}^N$

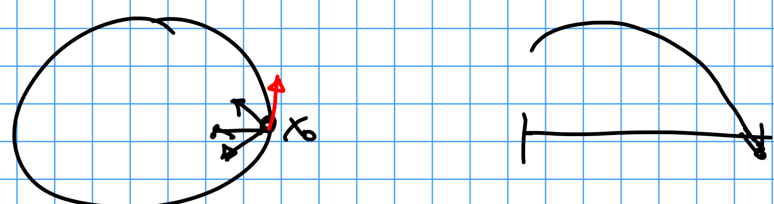
$\iff \nabla f(x_0)=0$

Stesso discorso per i pti di minimo locale.

ATTENZIONE ALL'IPOTESI A aperto. Se A non fosse aperto il risultato vale nei punti x_0 INTERNI AD A

(se x_0 è interno faccio lo stesso ragionamento ...)

Se invece x_0 NON È INTERNO e dunque $x_0\in\partial A$ NON posso concludere che $\nabla f(x_0)=0$



OSS. Non ho fatto teoremi sulle derivate di f^{-1}

(in A1 $\quad (f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ dove $f(x)=y$ A PATTO CHE $f'(x)\neq 0$)

POSSIAMO dire che se $f: A \to B$ $\quad A, B \subset \mathbb{R}^N$ aperti $\quad f$ bigettiva e supponiamo anche che f e f^{-1} siano C^1. Allora deve essere

$\forall y \in B \quad \boxed{J_{f^{-1}}(y) = J_f(x)^{-1}}$ dove $x \in A$ è tale che $f(x) = y$

(in particolare $J_f(x)$ è invertibile).

INFATTI Chiamo $g(y) = f^{-1}(y)$. Allora

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \quad / \quad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B$$

Se ho ipotizzato f e g differenziabili $\Rightarrow$

$$J_g(y) \cdot J_f(x) = I_d \qquad / \qquad J_f(x) \cdot J_g(y) = I_d$$

Ne segue la tesi

NOTA QUESTE MATRICI JACOBIANE SONO $N \times N$ (QUADRATE!!)

IL PROBLEMA DELLA DIFFERENZIABILITÀ DI f^{-1} lo rimando a dopo il compitino

---

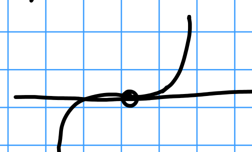
Def. Dico che x_0 è CRITICO / STAZIONARIO se $\nabla f(x_0) = 0$

Dunque Fermat dice:

$$x_0 \text{ interno, } x_0 \text{ di max/min rel.} \Rightarrow x_0 \text{ critico}$$

Il viceversa è falso, anche in A1 ho la $f(x) = x^3$

0 è critico ma 0 non è né di max né di min



Altro esempio $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

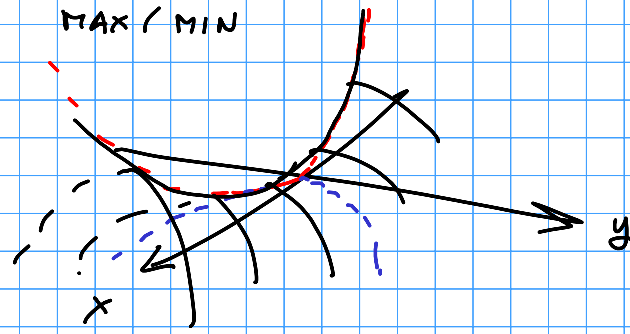
$\Rightarrow f$ è C^1. L'unico pto critico è $(0,0)$ ← NON È MAX/MIN

Infatti se guardo $f(x,0) = x^2$ ho minimo per $x=0$

$f(0,y) = -y^2$ ho massimo per $y=0$

DUNQUE $(0,0)$ NON PUÒ ESSERE MAX / MIN

IN $(0,0)$ C'È UNA "SELLA"



PER CAPIRE SE UN PTO CRITICO x_0 è di max/min

~~sol~~ CI SERVONO LE DERIVATE SECONDE !!

DERIVATE SECONDE

$f : A \to \mathbb{R}$ (non tratto il caso $m>1$) $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto $x_0 \in A$

Def. (derivate direzionali di ordine due). Siano $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

Definisco $f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w})$ = derivata direzionale in x_0 lungo $\vec{v}$ di $f'(x)(\vec{w})$

(AMMESSO CHE ESISTA !)

In particolare $f''(x_0)(\hat{e}_i, \hat{e}_j) =: \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ (derivata parziale seconda rispetto a x_i e x_j)

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_0)\right)$$

Questa def. (analogamente alla $f'(x_0)(\vec{v})$ ...) NON IMPLICA BUONE PROPRIETÀ DI f ... (Si potrebbe fare una def. di "differenziale secondo")

(NON LO DIMOSTRO)

TEOREMA ✓ Se $\dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ esistono continue in A (f è di classe $C^2(A)$)

ALLORA

(1) $(\vec{v},\vec{w}) \longmapsto f''(x_0)(\vec{v},\vec{w})$ è BILINEARE :

(DIFF. TOTALE DI ORDINE 2)

$$f''(x_0)(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2, \vec{w}) = \lambda f''(x_0)(\vec{v}_1, \vec{w}) + \mu f''(x_0)(\vec{v}_2, \vec{w})$$
$$f''(x_0)(\vec{v}, \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2) = \lambda f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w}_1) + \mu f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w}_2)$$

(per questo basterebbe l'esistenza del "differenziale secondo")

DALLA BILINEARITÀ SEGUE: se $\vec{v} = (v_1 \dots v_N)$, $\vec{w} = (w_1 \dots w_N)$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x_0)(\vec{v}\,\vec{w}) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} v_i w_j}$$

$$\parallel$$

$$f''(x_0)\left(\sum v_i \hat{e}_i, \sum w_j \hat{e}_j\right) =$$

uso la bilinearità e il fatto che
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = f''(x_0)(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$$

IN ALTRI TERMINI:

$$\boxed{f''(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = \vec{v}^{\,t} H_f(x_0)\, \vec{w} = H_f(x_0)\vec{w} \cdot \vec{v}}$$

dove H_f è la "MATRICE HESSIANA" definita da

$$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_N} \end{bmatrix}$$

(2) (Teorema di Schwartz) Inoltre $H_f(x_0)$ è una matrice simmetrica $\iff$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \left(\Rightarrow f''(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = f''(x_0)(\vec{w},\vec{v})\right)$$

<u>CONTROESEMPIO</u> (se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ NON SONO CONTINUE ....)

Definisco $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0) \qquad f(0,0) = 0$$

Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Se $(x,y) \neq (0,0)$ uso il calcolo..

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\overbrace{xy(x^2-y^2)}^{x^3y - xy^3}}{x^2+y^2} = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\,2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\frac{3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y\,\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2} \quad (**)$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ (per def. di derivata; N.B. $f(x,0) = 0 \ \forall x$)

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \dots =$$

$$-x\,\frac{y^4 + 4x^2y^2 - x^4}{(x^2+y^2)^2} = \underbrace{x\,\frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}}_{(*)}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

VEDIAMO LE DERIVATE "MISTE" IN $(0,0)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$??

PER CALCOLARLE FACCIO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCR.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}^{=0}}{x-0} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\, \underbrace{x\,\frac{(x^4 - x^2 \cdot 0^2 - 0^4)}{(x^2+0^2)^2}}_{(*)} = \underline{\underline{1}} \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y}\, \underbrace{\frac{y(0^4 + 0^2 \cdot y^2 - y^4)}{(0^2+y^2)^2}}_{(**)} = \underline{\underline{-1}}$$

DUNQUE $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ . . . .

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \right)$$

DATO CHE $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ CONVENIAMO DI

METTERE LE DERIVATE A DENOMINATORE IN ORDINE CRESCENT

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad i \le j \quad \left(\text{Scrivo } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ e non } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)$$

INOLTRE SCRIVO $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ INVECE DI $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ e non } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \right)$

OSS. Abbiamo detto che

$$f''(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = \sum_{i,j=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{NON C'È LA CONVENZIONE}}(x_0)\, v_i w_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) v_i w_i + 2 \sum_{\underbrace{i<j=1}_{\text{LA CONVENZIONE È OK}}}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i w_j$$

In particolare $f''(x_0)(\vec{v},\vec{v})$ (che convengo di indicare $f''(x_0)(\vec{v}^{\,2})$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)\, v_i^2 + 2 \sum_{i<j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j \Bigg)$$

NOTIAMO CHE

$$\boxed{f''(x_0)(\vec{v}^{\,2}) = \frac{d^2}{dt^2} f(x_0 + t\vec{v}) \Big|_{t=0}}$$

INFATTI

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x_0 + t\vec{v}) = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} f(x_0 + t\vec{v}) = \frac{d}{dt} \nabla f(x_0 + t\vec{v}) \cdot \vec{v} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t\vec{v})}\, v_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + tv) \cdot \vec{v} \right) v_i = \quad \left(\vec{v} = \frac{d}{dt}(x_0 + t\vec{v}) \right)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0 + t\vec{v})\, v_j v_i = f''(x_0)(x_0 + tv)(\vec{v},\vec{v})$$

metto $t=0$ trovo la formula

OSS. POSSIAMO GENERALIZZARE LA FORMULA SOPRA:

$f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e $\gamma : [a,b] \to A$ curva C^2.

PONIAMO $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. Sappiamo che

$$\varphi'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$\varphi''(t)$?? <u>SÌ</u> e viene

$$\varphi''(t) = \Big(H_f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\Big)\gamma'(t) + \underbrace{\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma''(t)}$$

questo pezzo non c'è nella formula di prima dato che $\gamma''(0) = 0$ quando $\gamma(t) = x_0 + t\vec{v}$