Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 18   06/11/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Se $\boxed{f \text{ è diff. in } x_0}$, se $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_N)$

$$(*) \quad \boxed{df(x_0)(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) v_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) v_N}$$

CI SERVE UNA CONDIZIONE CHE GARANTISCA LA DIFFERENZIABILITÀ:

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

$f : A \to \mathbb{R}^M$ A aperto di $\mathbb{R}^N$. Suppongo che TUTTE LE DERIVATE PARZIALI $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x)$ esistono e siano continue in x_0

ALLORA f è differenziabile in x_0. IN PARTICOLARE se f è $C^1(A)$ ($\frac{\partial f}{\partial x_i}$ esistono continue $\forall x \in A$) allora f è differenziabile in ogni punto di A.

Dim. Considero, per semplicità il caso $N=2$ e $M=1$.

DUNQUE $A \subset \mathbb{R}^2$ $f = f(x,y)$ da A in $\mathbb{R}$.

Suppongo che $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ $\forall (x,y) \in A$

e sono continue in $(x_0, y_0) \in A$.

Definisco $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare, ponendo:

$$L(v_1, v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) v_2$$

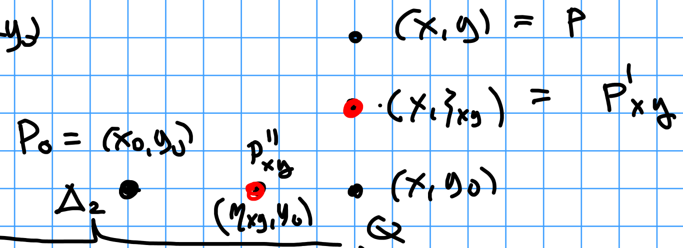
Dimostro che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - L(x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

(se lo faccio ho dim. la differenziabilità e trovo che $df(x_0) = L$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0)$$

$$\frac{f(P)-f(P_0)-L(P-P_0)}{\|P-P_0\|} =$$



$$\frac{\overbrace{f(P)-f(Q)-\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0)}^{\Delta_1}+\overbrace{f(Q)-f(P_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)}^{\Delta_2}}{\|P-P_0\|}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{\|P-P_0\|}$$

Per trattare Δ_1 uso Lagrange nella variabile y – x è fisso –

$$\Delta_1=\underbrace{f(x,y)-f(x,y_0)}_{\text{uso Lagrange in } y}-\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0)$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_{xy})(y-y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

dove ξ_{xy} è compreso tra y e y_0

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_{xy})-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(y-y_0)=\Delta_1(x,y)$$

Per Δ_2 uso Lagrange rispetto alla variabile x:

$$\Delta_2=\underbrace{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}_{\text{Lagrange}}-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)=$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\eta_{xy},y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)$$

dove $\eta_{x,y}$ è compreso tra x e x_0

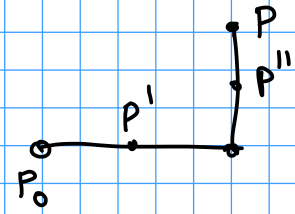
Mettendo tutto insieme

$$|\Delta_1+\Delta_2|=\left|\left(\overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(P'_{xy})-\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)}^{w_1}\right)(y-y_0)+\left(\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(P''_{xy})-\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)}^{w_2}\right)(x-x_0)\right|$$

$\vec{w}=(w_1,w_2)$ $\qquad$ $\overset{\shortparallel}{\left|\vec{w}\cdot(P-P_0)\right|}\leq\|\vec{w}\|\,\|P-P_0\|$

DUNQUE $$\left|\frac{\Delta_1+\Delta_2}{\|P-P_0\|}\right|\leq\|\vec{w}\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(P')-\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P'')-\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\right)^2}$$

Per come sono costruiti $P'_{xy} \to P_0$ $\quad P''_{xy} \to P_0$



se $P \to P_0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(P') \to \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P'') \to \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$$

$\Rightarrow \quad \|\vec{w}_{xy}\| \to 0 \quad$ da cui il limite di partenza $= 0$

#

DUNQUE SE f è C^1 siamo a posto!!

(C^1 riguarda solo le derivate parziali!!)

In particolare se f è $C^1 \Rightarrow f'(x)(\vec{v})$ è lineare in $\vec{v}$

TEOREMI DI CALCOLO DELLE (DERIVATE/) DIFFERENZIALE

LINEARITÀ: $\quad d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$

$$d(\lambda f)(x_0) = \lambda\, df(x_0)$$

PRODOTTI $\quad$ - - - -

NON È PER NULLA EVIDENTE DA QUANTO VISTO IN A1

COMPOSIZIONE $\quad$ Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^M$ aperti

$$f: A \to B \qquad g: B \to \mathbb{R}^K$$

$$x_0 \in A \qquad y_0 = g(x_0) \in B$$

Se f è diff. in x_0, g è diff. in y_0 $\Rightarrow$

$g \circ f : A \to \mathbb{R}^K$ è diff. in x_0 e vale la formula:

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$$

composizione di appl. lineari

In termini di matrici Jacobiane si ha

$$\underset{K \times N}{J_{g \circ f}(x_0)} = \overset{K \times M}{J_g(y_0)} \, \overset{M \times N}{J_f(x_0)}$$

Prodotto di matrici