Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 17 31/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

IL COMPITINO È STATO SPOSTATO DI 1 SETTIMANA
DUNQUE
VENERDÌ 24/11 ORE 17.00 AULA B 21

$f : A \to \mathbb{R}^M \quad A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\quad x_0 \in A, \ \vec{v} \in \mathbb{R}^N$

- Derivata direzionale $\quad f'(x)(\vec{v}) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t}$

$$\left(= \frac{d}{dt} f(x_0 + t\vec{v}) \Big|_{t=0} \right)$$

- VISTO CHE $\exists\, f'(x_0)(\vec{v})$ per ogni $\vec{v}$ $\;\not\Longrightarrow\;$ f continua in x_0

UN ESEMPIO $\quad f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ $\quad$ SI VEDE CHE

$$\exists\ f'(0)(\vec{v}) = \begin{cases} \dfrac{v_y^2}{v_x} & \text{se } v_x \neq 0 \\ 0 & \text{se } v_x = 0 \end{cases} \qquad \left(\vec{v} = (v_x, v_y) \right)$$

Però f NON è continua (visto qualche lezione fa)

ALTRO ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{x y^3}{x^2 + y^6}$$

$$f(0,0) = 0$$

SE $g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ allora $g(x,x) = \frac{1}{2}$ $x \neq 0$

$f(x,y) = g(x,y^3)$

nell'esempio precedente

$f(x,y) = g(x,y^2)$

È chiaro che f $\boxed{\text{NON È CONTINUA}}$ IN $O = (0,0)$ perché

in $(0,0)$

se considero

$$\lim_{t\to 0} f(t^3,t) = \left(\lim_{t\to 0} g(t^3,t^3) = \frac{1}{2}\right)$$

Posso vederlo con $f(\gamma(t))$ dove $\gamma(t) = (t^3,t)$

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è una curva C^∞. $\gamma(0) = (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3 t^3}{t^6 + t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

- Vediamo se esistono (e quanto fanno) le derivate direzionali

$f'(0)(\vec{v})$ $\qquad O = (0,0)$

Devo fare $\lim_{t\to 0} \frac{f(O + t\vec{v}) - f(O)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{v})}{t} =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t v_x (t v_y)^3}{t^2 v_x^2 + (t v_x)^6} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^3} \underbrace{\frac{v_x v_y^3}{v_x^2 + t^4 v_y^6}}_{\Delta(t)} = \lim_{t\to 0} \underset{\to 0}{t}\, \Delta(t)$$

(per vedere che il limite fa zero devo sempre distinguere il caso $v_x \neq 0$, per il quale uso il fatto che $t \to 0$, $\Delta(t) \to \frac{v_y^3}{v_x}$, dal caso $v_x = 0$, in cui $\Delta(t) = 0$ $\forall t$)

DUNQUE $\boxed{f'(0)(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v}}$

NONOSTANTE QUESTO f NON È CONTINUA IN ZERO

DEF (DIFFERENZIALE)

Dico che f è <u>differenziabile</u> in x_0 se esiste un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^N}} = 0$$

$o(\|x-x_0\|)$

(l'argomento del limite è in $\mathbb{R}^M$) $\iff$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^M}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^N}} = 0$$

Questa condizione si può esprimere dicendo:

$$(\star) \qquad f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

dove con $o(h)$ intendo una funzione σ tale che $\frac{\sigma(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \to x_0} 0$

In $(\star)$ il termine $r(x) := f(x_0) + L(x - x_0)$ si chiama "l'equazione dell'(iper-)piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^{N+M}$

Proposizione Se f è differenziabile esiste un unico L con la proprietà scritta sopra. Infatti se L verifica quanto sopra, allora $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$ esiste $f'(x_0)(\vec{v})$ e si ha

(le derivate direzionali INDIVIDUANO L)

$$f'(x_0)(\vec{v}) = L\vec{v} \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

questa formula implica che L è unica perché, dato $\vec{v}$, mi dice quanto fa $L\vec{v}$ - NATURALMENTE $f'(x_0)(\vec{v})$ è unico (dato $\vec{v}$) perché $f'(x_0)(\vec{v})$ è definito come un limite, e il limite - se esiste - è unico.

DIM. Fissiamo un vettore $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^N$ ($\vec{v} \neq 0$ se no è tutto ovvio). Come già osservato

$x_0 + t\vec{v} \in A$ per $|t|$ piccolo (A è aperto). DAL TEOREMA DI COMPOSIZIONE DEI LIMITI $\Rightarrow$
$(x = x_0 + t\vec{v})$

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\| x - x_0 \|_{\mathbb{R}^N}} \Rightarrow 0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0) - L(t\vec{v})}{\| t\vec{v} \|}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0) - t L(\vec{v})}{|t| \, \|\vec{v}\|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0) - t L(\vec{v})}{|t|} = 0 \quad \left(\begin{array}{c} \text{sto ipotizzando} \\ \vec{v} \neq 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0) - t L(\vec{v})}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} - L(\vec{v}) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} = L(\vec{v})$$

<u>che è la tesi</u> (per def. di derivata direzionale) #

<u>Def</u> (DIFFERENZIALE) Se f è differenziabile chiamo differenziale di f in x_0, che indico con $df(x_0)$, quell'unica applicazione lineare $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ per cui vale la formula sopra

<u>DUNQUE</u> Se f è diff. $\Rightarrow$ f ha derivate direzionali e $f'(x_0)(\vec{v}) = df(x_0)\vec{v}$

IN PARTICOLARE $\vec{v} \mapsto f'(x_0)(\vec{v})$ è lineare in $\vec{v}$

NEGLI ESEMPI DI PRIMA

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4} \Rightarrow f'(0)(\vec{v})=\begin{cases}\frac{v_y^2}{v_x} & \text{se } v_x\neq 0\\ 0 & \text{se } v_x=0\end{cases}$$ NON È LINEARE!!

Come vedo che $f'(0)(\vec{v})$ NON È LINEARE? Per esempio

$f'(0)(1,0)=0$ $f'(0)(0,1)=0$ MA

$f'(0)(1,1)=1\neq 0+0$

se fosse lineare IN. $\vec{v}$ dovrei avere

$$1=f'(0)(1,1)=f'(0)\big((1,0)+(0,1)\big)=\underbrace{f'(0)(1,0)+f'(0)(0,1)}_{0+0=0}$$

DUNQUE QUESTA FUNZIONE NON È DIFF. IN 0

NEL SECONDO ESEMPIO

$$f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^6} \quad (f(0,0)=0)$$

Avevo che $f'(0)(\vec{v})=0 \ \forall \vec{v} \Leftarrow$ LINEARE

MI POSSO CHIEDERE SE f è differenziabile in 0

Dovrebbe esistere L lineare t.c.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-L(x-0,y-0)}{\|(x-0,y-0)\|}=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{xy^3}{x^2+y^6}-\overset{0}{\cancel{L(x,y)}}\right)=0$$

Dato che dovrei avere $L(v_x,v_y)=f'(0)(\vec{v})=0$

DUNQUE LA DIFFERENZIABILITÀ CORRISPONDE A

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^6)}=0$$

VEDIAMO CHE QUESTO LIMITE NON PUÒ FARE ZERO

METTENDOCI SULLA CURVA $\gamma(t) = (t^3, t)$, dunque proviamo a calcolare ($x = t^3$, $y = t$, e mando $t \to 0$)

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^3\, t^3}{\sqrt{t^6 + t^2}\,(t^6 + t^6)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^6}{|t|\sqrt{t^4+1}\;2t^6} = +\infty$$

NON TORNA

$\boxed{f \text{ NON È DIFF IN } (0,0)}$

UN ALTRO MOTIVO:

PROP. Se f è differenziabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0

Dim.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) - L(x - x_0) + L(x - x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \|x - x_0\| + L(x - x_0) =$$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|}}_{\to 0} \underbrace{\|x - x_0\|}_{\to 0} + L(0) = 0$$

$(L = df(x_0))$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$, cioè f è continua in x_0

ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{x y^2}{x^2 + y^2}$$

$f(0,0) = 0$

(AVEVAMO VISTO CHE f È CONTINUA

$$\underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{y}_{\text{INFINITESIMA}}$$
)

Vediamo se è differenziabile.

Vediamo per prima cosa, come è fatto (l'eventuale) differenziale

NOTO CHE $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ dato che $f = 0$ sugli assi

Se esiste $L = df(0)$ deve essere

$$L\vec{v} = L(v_x, 0) + L(0, v_y) = v_x \underbrace{L(1,0)}_{\substack{L\hat{e}_1 \\ \| \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0)}} + v_y \underbrace{L(0,1)}_{\substack{L\hat{e}_2 \\ \| \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0)}}$$

DUNQUE SE $\exists\ L = df(0)$ deve essere

$$\rightarrow \quad df(0)(v_x, v_y) = v_x \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{=0} + v_y \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{=0} = 0$$

(DUNQUE SE f è diff. $\Rightarrow$ $df(x_0)$ è determinato dalle derivate parziali!!)

Tornando al calcolo che devo fare:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \qquad \left(\begin{array}{l} f(0,0)=0 \\ L(x,y)=0 \end{array}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\, y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} = 0$$

QUESTO LIMITE NON ESISTE: BASTA FARE UN TEST sulle rette: FISSO $\vec{v} = (v_x, v_y)$ prendo $x = t v_x,\ y = t v_y$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t v_x (t v_y)^2}{\left(t^2(v_x^2 + v_y^2)\right)^{3/2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}}{\cancel{t^3}} \frac{v_x v_y^2}{(v_x^2+v_y^2)^{3/2}} = \frac{v_x v_y^2}{(v_x^2+v_y^2)^{3/2}}$$

Dunque questo limite non fa zero (DIPENDE DALLA RETTA)

QUESTA f è CONTINUA MA NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

ESEMPIO $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2} \qquad f(0,0) = 0$

Anche in quest caso $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Dunque

se $L = df(0,0)$ (qualora esistesse) deve essere $L = 0$

(L è l'applicazione lineare nulla: $L(x,y) = 0 \quad \forall (x,y)$)

Dunque f sarà differenziabile $\iff$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \iff$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} = 0$$

MA ci ricordiamo $|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow x^2 \cdot y^2 \le \frac{(x^2+y^2)^2}{4}$

DUNQUE $\frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \le \frac{1}{4}(x^2+y^2)^{1/2} \to 0$ se $(x,y) \to (0,0)$

STAVOLTA IL LIMITE FA ZERO $\Rightarrow$

f è differenziabile e $df(0,0)$ = applicazione nulla

$df(0,0)(v_x, v_y) = 0 \quad \forall v_x, v_y$

$df(0)(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

NEL CASO DI Analisi 1

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo aperto $x_0 \in I$

f diff in $x_0 \iff \exists\, m \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$$

$\Updownarrow$ f è derivabile e $m = f'(x_0)$

(qui $L v_x = m v_x$)

DUNQUE NEL CASO $N = 1$

DIFFERENZIABILE $\iff$ DERIVABILE e allora

$L h = d f(x_0) h = f'(x_0) h \quad \forall h \in \mathbb{R}$

Se TORNO A $\mathbb{R}^N$ COME INDIVIDUO il differenziale ??

<u>DEF.</u> Se $f : A \to \mathbb{R}^M$ A aperto di $\mathbb{R}^N$ $x_0 \in A$.

<u>SUPPONGO</u> che f sia differenziabile in x_0. Allora

$L = d f(x_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ lineare.

DUNQUE esiste una matrice J $\boxed{M \times N}$ che rappresenta L

(nelle coordinate canoniche

$\hat{e}_i$ base canonica di $\mathbb{R}^N$, $\hat{e}'_j$ base canonica in $\mathbb{R}^M$)

$$\left[\begin{array}{l} L(v_1 \hat{e}_1 + \dots + v_N \hat{e}_N) = w_1 \hat{e}'_1 + \dots + w_M \hat{e}'_M \\ \iff \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_M \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

COME SARÀ FATTA J ?? $\quad J = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots M \\ j=1\dots N}}$

$a_{ij} = \underset{\uparrow}{L} \hat{e}_j \leftarrow$ componente i-ESIMA $\quad j = 1 \dots N$

COLONNA j-ESIMA DI J

MA $L \hat{e}_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ (che è un vettore di $\mathbb{R}^M$)

DUNQUE $a_{ij} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ componente i-esima cioè

$$\boxed{a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)}$$

CIOÈ (se f è differenziabile) la matrice $J_f(x_0) = J$

che rappresenta $df(x_0)$ è

$$J_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x_0) \end{bmatrix}$$

MATRICE JACOBIANA DI f IN x_0

$$df(x_0)(\vec{v}) = J_f(x_0)\,\vec{v}$$

PRODOTTO RIGHE × COLONNE

ESERCIZIO Prendiamo $f(x,y) = xy$

$A = \mathbb{R}^2$ $\quad P_0 = (1,-1)$ $\quad N=2 \quad M=1$

NOTO CHE $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 1$

MATRICE JACOBIANA IN P_0 È $[-1, 1]$

Vediamo se f è differenziabile: devo fare

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy - (-1) - [-1, 1]\begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \end{bmatrix}}{\|(x-1, y+1)\|} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy + x - 1 - y - 1 + 1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}} = 0$$

CONVIENE SCRIVERE $x = 1 + \xi \quad y = -1 + \eta$

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{(1+\xi)(-1+\eta)+1+\xi-(-1+\eta)-1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0$$

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{-1-\cancel{\xi}+\cancel{\eta}+\eta\xi+1+\cancel{\xi}+1-\cancel{\eta}-1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0$$

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0 \quad \Leftarrow \text{TORNA PERCHÈ}$$

$$|\xi\eta| \le \frac{\xi^2+\eta^2}{2}$$

DUNQUE $\left|\frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right| \le \frac{1}{2}\left(\xi^2+\eta^2\right)^{1/2} \to 0$

LA FUNZIONE xy È DIFF. IN $(1,-1)$

e $\quad d f(1,-1)(v_x, v_y) = -v_x + v_y \qquad \forall v_x, v_y \in \mathbb{R}$