Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 16   30/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

DERIVAZIONE IN PIÙ VARIABILI

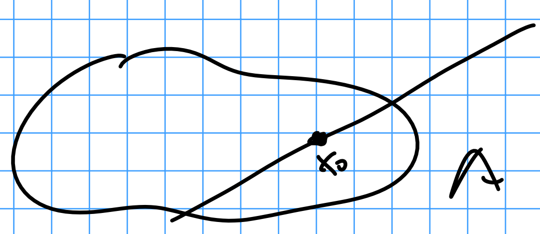
$A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $x_0 \in A$ $f : A \to \mathbb{R}^M$

Derivata direzionale Fissato $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ chiamo derivata di f nel punto x_0 e nella direzione $\vec{v}$

$$f'(x_0)(\vec{v}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} \quad (\text{se esiste})$$

In altri termini $f'(x_0)(\vec{v}) = \frac{d}{dt} f(x_0 + t\vec{v}) \Big|_{t=0}$

cioè la derivata della restrizione di f sulla retta che passa per x_0 di direzione $\vec{v}$ NEL PUNTO $t=0$ ($\gamma(t)=x_0$)
(questa retta è descritta dalla curva $\gamma(t) = x_0 + t\vec{v}$)



OSS. • Se $\vec{v} = 0$ allora $\exists f'(x_0)(\vec{0}) = 0$

(basta guardare la def.)

• Se esiste $f'(x_0)(\vec{v})$ allora esiste $f'(x_0)(\lambda \vec{v})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e si ha

$$f'(x_0)(\lambda \vec{v}) = \lambda f'(x_0)(\vec{v})$$

, infatti ($\lambda \neq 0$ senno è ovvio)

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda \vec{v}) - f(x_0)}{t} =$$

$$\lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda \vec{v}) - f(x_0)}{\lambda t} =$$

(cambio di variabile $\tau = t\lambda$)

$$\lambda \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x_0 + \tau \vec{v}) - f(x_0)}{\tau} = \lambda f'(x_0)(\vec{v})$$

$$\boxed{f'(x_0)(\lambda \vec{v}) = \lambda f'(x_0)(\vec{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

IN GENERALE NON VALE CHE $f'(x_0)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f'(x_0)(\vec{v}_1) + f'(x_0)(\vec{v}_2)$

??

IN ANALISI 1, quando $N = M = 1$, sapevamo che

f derivabile $\Rightarrow$ f continua

CI POSSIAMO CHIEDERE SE

$$\exists f'(x_0)(\vec{v}) \text{ per ogni } \vec{v} \overset{??}{\Longrightarrow} f \text{ è continua in } x_0$$

LA RISPOSTA È <u>NO</u> come si vede facendo alcuni esempi.

<u>ESEMPIO 1</u> $\quad g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \qquad g(0,0) = 0$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (N=2\,,\ M=1)$

g NON È CONTINUA :

$$g(tv_x, tv_y) = \frac{(tv_x)(tv_y)}{t^2v_x^2 + t^2v_y^2} = \frac{t^2}{t^2}\frac{v_xv_y}{v_x^2+v_y^2} = \frac{v_xv_y}{v_x^2+v_y}$$

DUNQUE $\lim_{t\to 0} g(tv_x, tv_y) = \frac{v_xv_y}{v_x^2+v_y^2}$ ← dipende da $\vec{v} = (v_x, v_y)$

$\Rightarrow$ non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

$\boxed{(0,0) \neq (v_x, v_y)}$

Per curiosità vediamo se esistono $g'(0,0)(v_x, v_y)$,

Devo calcolare $\lim_{t\to 0} \frac{g(tv_x, tv_y) - g(0,0)^{=0}}{t} =$

$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{v_xv_y}{v_x^2+v_y^2}$ ← $\boxed{\text{esiste solo se } v_x=0 \text{ oppure } v_y=0}$

Infatti se v_x e v_y sono entrambi diversi da zero $\Rightarrow$

$\Delta = \frac{v_xv_y}{v_x^2+v_y^2} \neq 0$ e il "limite è ∞"

(nel senso che $+\infty$ da dx / $-\infty$ da sx quando $\Delta > 0$ e il contrario se $\Delta < 0$)

DUNQUE $\exists\ g'(0)(\hat{e}_1) = 0 \qquad g'(0)(\hat{e}_2) = 0$

$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

e dunque $\exists\ g'(0)(\lambda, 0) = g'(0)(0,\lambda) = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Se invece $v_x \neq 0\ \ v_y \neq 0$ NON ESISTE $g'(0)(\vec{v})$

$\vec{v} = (v_x, v_y)$

ESEMPIO 2

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{(x^2+y^4)} \qquad f(0,0)=0$$

OSS. che $\quad f(x,y)=g(x,y^2)$
(dove g è quello dell'esempio 1).

f è ancora discontinua dato che

$$\lim_{t\to 0} f(t^2,t)=\lim_{t\to 0} g(t^2,t^2)=1 \neq 0$$

VEDIAMO se esistono le derivate direzionali.
Prendo $\vec{v}=(v_x,v_y)\neq(0,0)$ e calcolo

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\vec{v})-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_x,tv_y)}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\frac{tv_x(tv_y)^2}{(tv_x)^2+(tv_y)^4}=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t^3}}{\cancel{t^3}}\,\frac{v_xv_y^2}{v_x^2+t^2v_y^4}=\begin{cases}\dfrac{v_y^2}{v_x} & \text{se } v_x\neq 0\\ 0 & \text{se } v_x=0\end{cases}$$

DUNQUE QUESTA FUNZIONE HA DERIVATA DIREZIONALE IN OGNI $\vec{v}$ MA È ANCORA DISCONTINUA

ESEMPIO

$$\boxed{f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^6}} \quad \left(=g(x,y^3) \text{ con } g \text{ quello dell'es. 1}\right)$$

dunque f NON È CONTINUA IN $(0,0)$

$$\lim_{t\to} f(t^3,t)\ \cdots = \frac{1}{2}\neq 0$$

Vediamo $f'(0)(\vec{v})$ $\qquad \vec{v}=(v_x,v_y)\neq(0,0)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tv_x, tv_y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{tv_x (tv_y)^3}{(tv_x)^2 + (tv_y)^6} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{t^4 v_x v_y^3}{t^2 (v_x^2 + t^4 v_y^6)} = \lim_{t \to 0} t \underbrace{\frac{v_x v_y^3}{v_x^2 + t^4 v_y^6}}_{\Delta(t)} = 0$$

infatti se $v_x \neq 0$ $\Delta(t) \to \frac{v_y^3}{v_x}$

e dunque $t\Delta(t) \to 0$

se invece $v_x = 0 \Rightarrow \Delta(t) = 0$ $\forall t$ e dunque

$\forall t$ $t\Delta(t) = 0 \longrightarrow 0$

Anche in questo caso le derivate direzionali esistono e addirittura sono nulle in ogni direzione

$$f'(0)(\vec{v}) = 0 \qquad \forall v$$

MA f è discontinua

<u>Def.</u> Chiameremo "derivate parziali" le derivate

$$f'(x_0)(\hat{e}_i) =: \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$$

Qui $\hat{e}_i$ = versore i-esimo ($\hat{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-esimo

Si vede facilmente dalla definizione che

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ = derivata di f in cui le variabili $\neq x_i$ sono "congelate" –

$x_i \longmapsto f(x_{0,1}, \dots, x_i, \dots, x_{0N})$ = la derivo rispetto a x_i

<u>Per esempio</u> Se $f(x,y,z) = \boxed{xyz}$

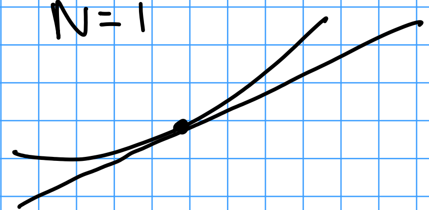
$(N = 3 \quad x = x_1,\ y = x_2,\ z = x_3, \quad M = 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x} = yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial y} = xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial f}{\partial z} = xy$$

N=1



N

ci serve una definizione legata alla nozione di piano tangente