Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 15   25/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Cos'è un grafico / sottografico / sopragrafico

Def. Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$

chiamo GRAFICO DI f, G_f, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ definito così:

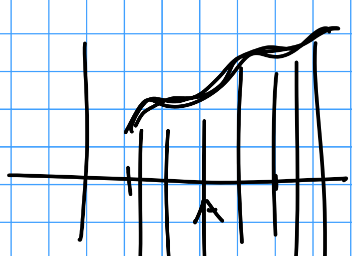
$$G_f = \{ (x,y) : x \in A, \quad y = f(x) \}$$

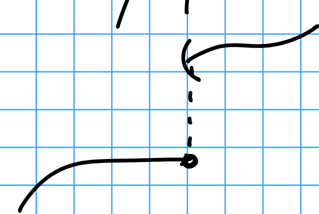
Nel caso in cui $M = 1$, cioè $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad (A \subset \mathbb{R}^N)$

chiamo SOTTOGRAFICO / SOPRAGRAFICO di f

l'insieme (in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{N+1}$) definito da

$$\{ (x,y) : x \in A \quad y \le f(x) \} \, / \, \{ \ldots \quad y \ge f(x) \}$$





OSS. Supponiamo che A sia chiuso e che f sia continua.

Il grafico / il sotto/sopra grafico sono chiusi in $\mathbb{R}^{N+M}$

In effetti posso considerare la funzione $F: A \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$

$F(x,y) = y - f(x)$ ← è continua

e noto che grafico di $f = \{ F = 0_M \} = F^{-1}(\{0_M\})$

$\{(x,y) : F(x,y) \in \{0\}\}$

VISTO

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ continua e se $F \subset \mathbb{R}^M$ F è chiuso in $\mathbb{R}^M$ ($A \subset \mathbb{R}^M$ A aperto)

$\Rightarrow f^{-1}(F)$ è chiuso in $\mathbb{R}^N$

$\{ x : f(x) \in F \}$

$f^{-1}(A)$ è aperto

Analogamente

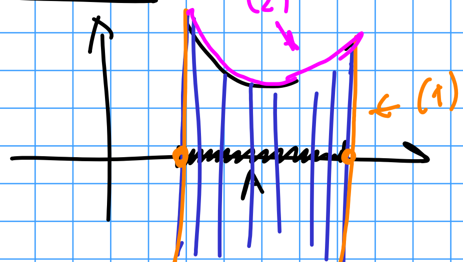
sottografico di $f = \{(x,y) : F(x,y) \leq 0\} = F^{-1}(\underbrace{]-\infty, 0]})$

sopra grafico di $f = \{ (x,y) : F(x,y) \geq 0 \} \dots$ chiuso in $\mathbb{R}$

FATTO A chiuso $f : A \to \mathbb{R}$ f continua

$S :=$ sottografico di $f = \{ (x,y) : x \in A \quad y \leq f(x) \}$

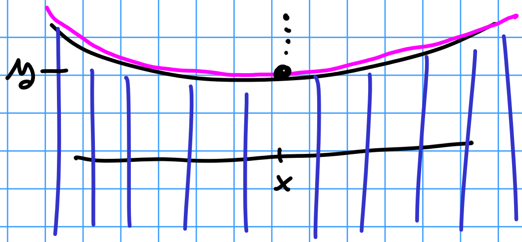
Allora $\partial S = \underbrace{\{ x \in \partial A , y \leq f(x) \}}_{(1)} \cup \underbrace{\{ x \in A , y = f(x) \}}_{(2)}$



Vediamo di dimostrarlo. FACCIO PRIMA IL CASO $A = \mathbb{R}^N$

$(\partial A = \emptyset)$ In questo caso dimostro

$$\partial \{ (x,y) : y \leq f(x) \} = \{ (x,y) : y = f(x) \}$$



ok → $\partial\{y \le f(x)\} \subset \{y = f(x)\}$ perché

$\partial\{F \le 0\} \subset \{F = 0\}$

c'è da dimostrare il viceversa e cioè che, se $y = f(x)$ $\Rightarrow$ (x,y) è di frontiera per $\{y \le f(x)\}$

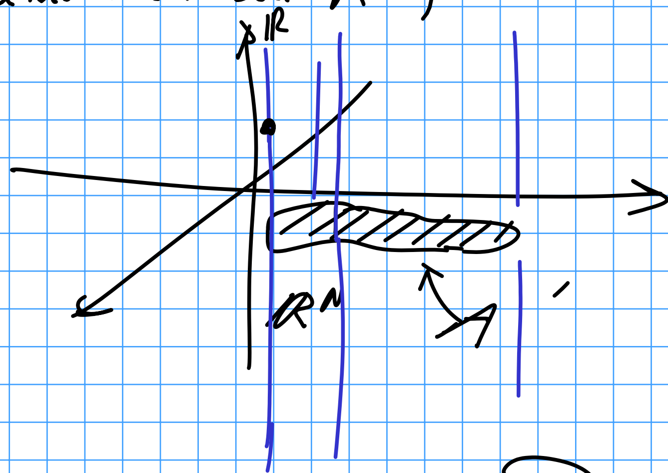
Questo si vede subito perché se prendo $(x, y+1/n) = P_n$

(P_n) è una successione che tende a (x,y) e $P_n \notin \{y \le f(x)\}$ dato che $f(x) = y < y + 1/n$

Viceversa $(x,y) \in \{y \le f(x)\}$ → posso prendere la successione costante, che vale sempre (x,y), che tende a (x,y) e $\in \{y \le f(x)\}$

DUNQUE se $A = \mathbb{R}^N$ $\partial\{y \le f(x)\} = \partial\{y = f(x)\}$

D'ALTRA PARTE consideriamo $C = \{(x,y) : x \in A,\ y \in \mathbb{R}\}$ (il "cilindro di base A") $= A \times \mathbb{R}$



Allora C è chiuso e $\overline{\partial C} = \overline{\partial A \times \mathbb{R}} = \{(x,y) : x \in \partial A,\ y \in \mathbb{R}\}$

Lo dimostro con le successioni — IN OGNI CASO devo dimostrare due inclusioni

(1) $\partial C \subset \partial A \times \mathbb{R}$ Se $(x,y) \in \partial C \Leftrightarrow \exists\ (x'_n, y'_n), (x''_n, y''_n)$ che tendono entrambe a (x,y) e con $\underbrace{(x'_n, y'_n) \in C}_{\Leftrightarrow\ x'_n \in A}$ $\underbrace{(x''_n, y''_n) \notin C}_{\Leftrightarrow\ x''_n \notin A}$

($(x,y) \notin A\times B \iff x\notin A$ oppure $y\notin B$)

DUNQUE TROVO x'_n in A con $x'_n \to x$ $\iff x\in\partial A$

x''_n in $\complement A$ con $x''_n \to x$

HO TROVATO $\partial C \subset \partial A \times \mathbb{R}$

(2) VICEVERSA se $x\in\partial A$, $y\in\mathbb{R}$ trovo $x'_n\in A$, $x''_n\in\complement A$ con $x'_n\to x$ $x''_n\to x$. NE SEGUE

$$\underset{\displaystyle C}{\underset{\cap}{(x'_n,y)}} \to (x,y) \qquad \underset{\displaystyle \complement C}{\underset{\cap}{(x''_n,y)}} \to (x,y)$$

e dunque $(x,y)\in\partial C$

HO TROVATO $\partial A\times\mathbb{R} \subset \partial C$

TORNIAMO AL SOTTOGRAFICO

$$S = \{(x,y) : \underline{\underline{x\in A}} \quad y\le f(x)\}$$

SUPPONIAMO CHE f sia definita su tutto $\mathbb{R}^N$ (MA LÀ "GUARDO" solo in A)

(si può rimuovere questa ipotesi ma....)

$$S = \underbrace{\{(x,y) : x\in A,\ y\in\mathbb{R}\}}_{S_1} \cap \underbrace{\{(x,y) : x\in\mathbb{R}^N,\ y\le f(x)\}}_{S_2}$$

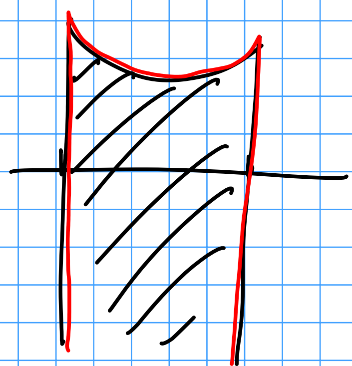
S_1 e S_2 sono chiusi (A chiuso e f continua)

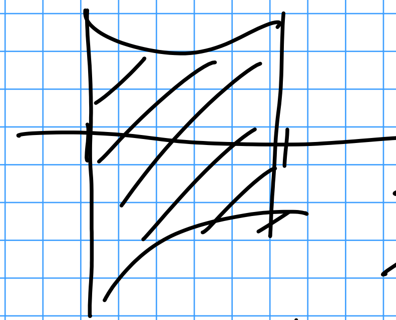
$\partial S_1 = \partial A\times\mathbb{R}$ $\qquad \partial S_2 = \{y=f(x)\}$

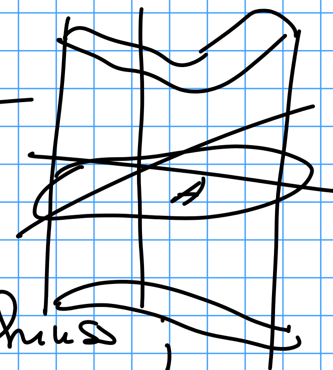
(per i casi visti sopra) . FORMULA

$$\partial S = (\partial S_1 \cap S_2) \cup (\partial S_2 \cap S_1) =$$

$$\Big(\underbrace{\{x\in\partial A,\ y\in\mathbb{R}\}\cap\{x\in\mathbb{R}^N,\ y\le f(x)\}}_{\{x\in\partial A,\ y\le f(x)\}\ \cup\ \{x\in A,\ y=f(x)\}}\Big)\cup\Big(\{y=f(x)\}\cap\{x\in A,\ y\in\mathbb{R}\}\Big)$$







Def. (INSIEMI NORMALI) $A\subset\mathbb{R}^N$ chiuso;

$f, g : A\to\mathbb{R}$ continue, $g(x)\le f(x)$ $\forall x\in A$

Pongo $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{N+1} : x\in A \ \ g(x)\le y\le f(x)\}$

ALLORA W è chiuso e

$$\partial W=\{(x,y): x\in\partial A,\ g(x)\le y\le f(x)\}\cup\{(x,y): x\in A,\ y=g(x)\}\cup\{(x,y), x\in A,\ y=f(x)\}$$

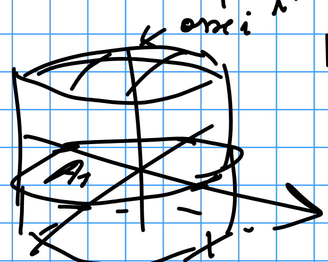
IN GENERALE SIA $A\subset\mathbb{R}^N$. Fissiamo i tra 1 e N

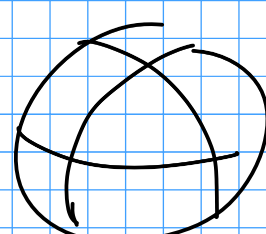
Posso scrivere $\mathbb{R}^N=X\times\mathbb{R}$ dove $X=\{(x_1\dots x_{i-1}, x_{i+1}\dots x_N)\}$ (manca la componente i-esima). Dico che A è

è un insieme normale rispetto all'asse i-esimo ($i=1..N$)

se esiste $A_1\subset X$ e due funzioni $g, f : A\to\mathbb{R}$ con $g\le f$ tale che

$$A=\{(x', x_i) : x'\in A_1,\ g(x')\le x_i\le f(x')\}$$





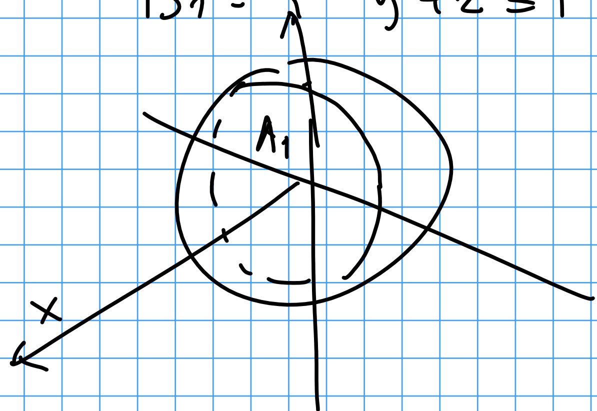
Per esempio $\overline{B} = \{x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

$\overline{B}$ è NORMALE RISPETTO $\underbrace{\text{ALL'ASSE X}}_{(1)}$ / $\underbrace{\text{ASSE Y}}_{(2)}$ / $\underbrace{\text{ASSE Z}}_{(3)}$

(1) RISPETTO ALL'ASSE X

$\overline{B} : ((x,y,z) : (y,z) \in B_1 \; -\sqrt{1-y^2-z^2} \le x \le \sqrt{1-y^2-z^2}$

$B_1 = \{ y^2+z^2 \le 1 \}$



(2) . –

(3) rispetto all'asse z:

$\overline{B} = \{ (x,y,z) : (x,y) \in B_1 \; -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$

$B_1 = \{ x^2+y^2 \le 1 \}$

IL CILINDRO $C = \{ (x\,y\,z) : x^2+y^2 \le 1 ; -1 \le z \le 1 \}$

è UN INSIEME NORMALE RISPETTO ALL'ASSE Z:

$C_1 = \{ x^2+y^2 \le 1 \}$ $\quad g(x,y) = -1 \quad f(x,y) = 1$

e vedete che $C = \{ (x,y,z) : (x,y) \in C_1, \; g(x,y) \le z \le f(x,y)$

$$\partial C = \{ x^2+y^2=1, -1\le z\le 1\} \cup \{ x^2+y^2\le 1, z=1\} \cup \{x^2+y^2\le 1, z=-1\}$$

TORNIAMO ALLE CURVE

RIVEDIAMO I GRAFICI

Def. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\quad G_f=\{(x,y): x\in[a,b]\ y=f(x)\}$

f di classe C^1.

G_f è un arco di curva regolare dato che la posso parametrizzare con $\gamma(t):=(t, f(t))$ $\quad a\le t\le b$

In fatti γ è C^1 e $\gamma'(t)=(1, f'(t))$ $\quad \|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+(f'(t))^2}\neq 0$

DUNQUE $\quad \ell(G_f)=\int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$

POSSO ANCHE CONSIDERARE $f:[a,b]\to\mathbb{R}^{N-1}$

$f(t)=(f_1(t),\dots,f_{N-1}(t))$

Allora $G_f=(x, f(x))\subset\mathbb{R}^N$ è un arco ..

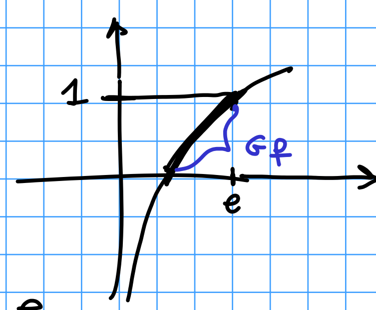
perché ho la parametrizzazione $\gamma(t)=(t, f(t))=$

$(t, f_1(t),\dots, f_{N-1}(t))\in\mathbb{R}^N$

Come prima $\gamma'=(1, f_1',\dots,f_{N-1}')=(1, \underset{\text{vettore di } \mathbb{R}^{N-1}}{f'(t)})$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+\|f'\|^2_{N-1}}$ ..

VEDIAMO QUALCHE ALTRO ESEMPIO



$f(x)=\ln(x)$ $\quad 1\le x\le e$

$G_f=\{(x,\ln(x)) : 1\le x\le e\}$

$\ell(G_f)=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_1^e\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx=$

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, x\,dx \qquad y = x^2 \qquad dy = 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{\sqrt{1+y}}{y}\, dy = \qquad \sqrt{1+y} = t \qquad 1+y = t^2$$

$$y = t^2-1 \qquad dy = 2t\,dt$$

$$\int_{\sqrt2}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t}{t^2-1}\, t\,dt = \int_{\sqrt2}^{\sqrt{1+e^2}} \left(1 + \frac{1}{(t-1)(t+1)}\right) dt =$$

$$\sqrt{1+e^2} - \sqrt2 + \frac12 \int_{\sqrt2}^{\sqrt{1+e^2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$\sqrt{1+e^2} - \sqrt2 + \frac12 \left[\ln \frac{(t-1)}{t+1} \right]_{\sqrt2}^{\sqrt{1+e^2}} =$$

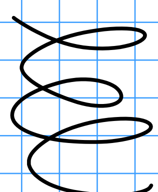
$$\sqrt{1+e^2} - \sqrt2 + \frac12 \left(\ln \frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1} - \ln \frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1} \right) =$$

$$\sqrt{1+e^2} - \sqrt2 + \frac12 \left(\ln \frac{(\sqrt{1+e^2}-1)^2}{\cancel{1}+e^2-\cancel{1}} - \ln \frac{(\sqrt2-1)^2}{\underbrace{2-1}_{1}} \right) =$$

$$\sqrt{1+e^2} - \sqrt2 + \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{e(\sqrt2-1)}\right)$$

Altri esempi di curve:

<u>ELICA</u>



$$\gamma(t) = \big(R\cos(t),\ R\sin(t),\ ct\big)$$
$R>0$, $c>0$

Se volessi descrivere il sostegno di γ ?? ci provo:

Quali sono le (x,y,z) : $\exists\, t$ per cui $(x,y,z) = \gamma(t)$

SICURAMENTE DEVE ESSERE $x^2+y^2=R^2$. Inoltre $y = x\tan(t)$! A parte qualche eccezione !

POI SE $(x, y, z) = \gamma(t) \Rightarrow z = ct$ $\qquad t = z/c$

$$\left\{ y = x \tan\left(\frac{z}{c}\right) \;,\; x^2 + y^2 = R^2 \right\} = S$$

(i conti fatti sopra mostrano che sostegno di $\gamma \subset S$; è probabile che valga $=$)

VEDIAMO LA LUNGHEZZA DI UN TRATTO DI ELICA

per esempio $0 \le t \le 2\pi$

(considero γ ristretta a $[0, 2\pi]$)

Devo calcolare γ' :

$$\gamma'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), c)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + c^2} \qquad (\Rightarrow \gamma'' \perp \gamma')$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2+c^2}\, dt = 2\pi\sqrt{R^2+c^2}$$

(in generale $\ell\left(\gamma|_{[a,b]}\right) = (b-a)\sqrt{R^2+c^2}$)

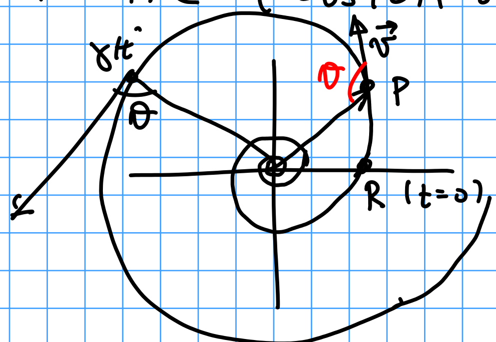
OSS. Se una curva γ ha modulo costante $\Rightarrow$ γ è perpendicolare a γ'

DIM! cost. $= \|\gamma(t)\|^2 = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle \Rightarrow$

$$0 = \frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle$$

ESEMPIO Spirale logaritmica : $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = R e^{\alpha t}(\cos(t), \sin(t)) \qquad R > 0 \quad \alpha > 0$$



$$\gamma(0) = (R, 0)$$

$$\lim_{t \to -\infty} \gamma(t) = (0,0)$$

(infinitesimo × limitato $\to 0$)

PROPRIETÀ Prendiamo $P=\gamma(t)$ sulla curva.

La tangente alla curva in P è il vettore

$$\vec{v} = \gamma'(t) = \underbrace{R\alpha e^{\alpha t}(\cos(t),\sin(t))} + \underbrace{Re^{\alpha t}(-\sin(t),\cos(t))}$$

ortogonali

Considero $\vec{p} = P - O$ (il vettore "posizione") Facciamo il prodotto scalare $\vec{p}\cdot\vec{v} = \gamma(t)\cdot\gamma'(t)$ $\left(= \frac{d}{dt}\frac{\|\gamma(t)\|^2}{2}\right)$

$$= Re^{\alpha t}(\cos(t),\sin(t))\cdot\left(R\alpha e^{\alpha(t)}(\cos(t),\sin(t)) + Re^{\alpha t}(-\sin(t),\cos(t))\right)$$

ortogonali

$$= \alpha R^2 e^{2\alpha t} = \gamma(t)\cdot\gamma'(t)$$

Calcolo anche $\|\gamma(t)\| = Re^{\alpha t}$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2\alpha^2 e^{2\alpha t} + R^2 e^{2\alpha t}} = Re^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2+1}$$

ALLA FINE $\dfrac{\gamma'(t)\cdot\gamma(t)}{\|\gamma'(t)\|\,\|\gamma(t)\|} = \dfrac{R^2\alpha\, e^{2\alpha t}}{R^2 e^{2\alpha t}\sqrt{1+\alpha^2}} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

DUNQUE $\cos(\theta) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ è costante rispetto a t

$\uparrow$

$\theta(t)$