Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 14 24/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

INTRODUCIAMO: $S \subset \mathbb{R}^N$ è "arco di curva regolare"

se $\exists$ $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ (una "parametrizzazione")

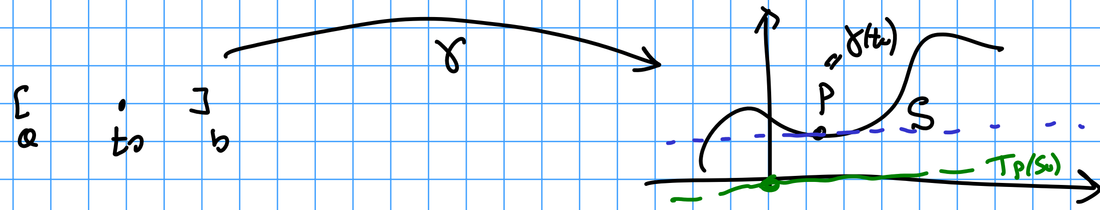
tale che γ è iniettiva, $\gamma([a,b]) = S$ (S è il sostegno di γ) e infine γ è regolare (γ è C^1 con $\gamma' \neq 0$)

COME DETTO IERI ha senso fare

$$\int_S f \, ds =: \int_\gamma f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \quad \left(\begin{array}{l}\text{NON DIPENDE DALLA} \\ \text{PARAMETRIZZAZIONE}\end{array}\right)$$

INOLTRE Se S è come sopra $\Rightarrow$ $\forall P \in S$ è definita la "retta tangente" a S in P, nel seguente modo:

- prendo una parametrizzazione $\gamma : [a,b] \to S$ per S
- trovo il punto $\underbrace{t_0}_{\text{ESISTE ED È UNICO}} \in [a,b]$ per cui $\gamma(t_0) = P$
- faccio $\gamma'(t_0) = \vec{v} \neq 0$ ($\vec{v} \neq 0$ perché γ è regolare)



- Definisco la retta tangente

$$T_P(S) = \{ \lambda \vec{v} : \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ \lambda \gamma'(t_0) : \lambda \in \mathbb{R} \}$$

(è una retta che passa per zero). Se la voglio applicare in P devo considerare $\{ P + \lambda \gamma'(t_0) : \lambda \in \mathbb{R} \}$

($T_P(S)$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1)

HA SENSO QUESTA DEFINIZIONE perché se cambio parametrizzazione, passo da γ a γ_1

$\gamma : [a,b] \to S$, $\gamma_1 : [c,d] \to S$

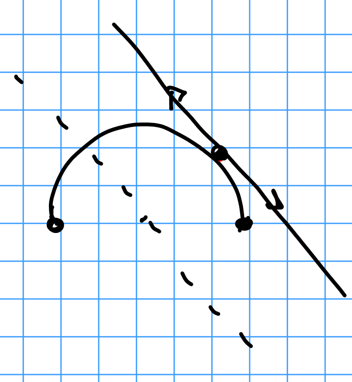
ci sarà $s_0 \in [c,d]$ per cui $\gamma_1(s_0) = P$

e in corrispondenza avrò $\vec{v}_1 = \gamma_1'(s_0)$

So che $\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}$ per un $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda = \varphi'(s_0)$ dove φ è il cambio di parametrizzazione)

se $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)) \Rightarrow$

$$\gamma_1'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \underbrace{\varphi'(s)}_{\lambda}$$



- Dato S arco di curva regolare posso definire gli "estremi" di S, che sono due punti P, Q tali che, se $\gamma : [a,b] \to S$ è una param., allora $\{P, Q\} = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$

NON C'È UN ORDINE TRA P e Q

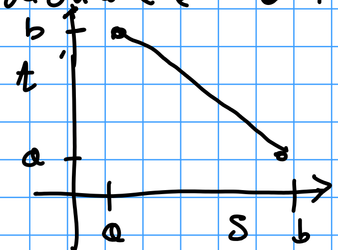
· ANCHE GLI ESTREMI NON DIPENDONO DALLA parametrizzazione.

<u>OSS.</u> Noto che, se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è una curva regolare allora posso considerare $\tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ def. da

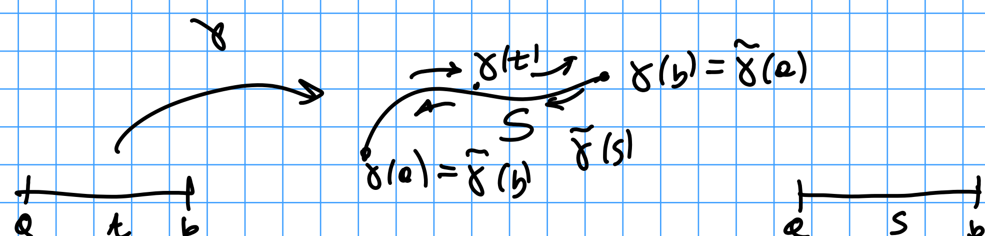
$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(a+b-s)$$

($\tilde{\gamma}$ è ottenuta da γ mediante il cambio di parametro

$$\varphi(s) = a+b-s$$



" $\tilde{\gamma}$ percorre il sostegno di γ in verso opposto"



$$\boxed{\tilde{\gamma}'(s) = -\gamma'(\varphi(s))}$$

· DICO CHE S è un'arco di curva <u>ORIENTATO</u> se decido chi è l'estremo sx (primo estremo), e chi è l'estremo dx (secondo estremo)

IN MODO RIGOROSO dovrei scrivere

$$(S, P, Q) \neq (S, Q, P)$$

arco di curva regolare

estremi

Se faccio questa scelta divido automaticamente le parametrizzazioni di S in quelle

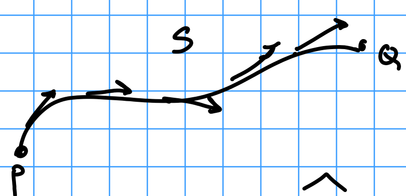
- CONCORDI CON (S, P, Q): $\gamma(a) = P \quad \gamma(b) = Q$
- DISCORDI DA (S, P, Q): $\gamma(a) = Q, \ \gamma(b) = P$

<u>Nota:</u> Se γ è concorde $\tilde{\gamma}$ è discorde (e viceversa)

, Se (S, P, Q) è un'arco orientato è definito in ogni $R \in S$ il versore tangente

$$\hat{T}(R) \in \mathbb{R}^N \quad \|T(R)\| = 1$$ ottenuto come segue:

- Prendo una parametrizzazione γ di S. Scelgo γ in modo che sia concorde con (S, P, Q) (se γ fosse discorde passo passare a $\tilde{\gamma}$)
- Trovo il valore del parametro t_0 per cui $\gamma(t_0) = R$
- Definisco $\hat{T}(R) = \dfrac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$



- Si può verificare che $\hat{T}(R)$ è continuo rispetto a R
- Si dimostra che questa nozione non dipende dalla parametrizzazione concorde.

<u>PER ESEMPIO</u> $\quad S = \{x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0\}$

S è un'arco regolare perché lo descrivo mediante

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

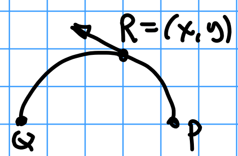
Ne segue che gli estremi di S sono $(-1, 0)$ e $(1, 0)$

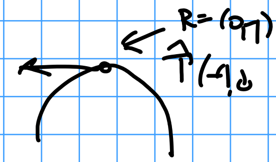
dato che $\gamma(0)=(1,0)$ e $\gamma(\pi)=(-1,0)$

(Se avessi usato $\gamma_1(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$ $-1\le t\le 1$ si trova lo stesso cosa)

- Se decido che $Q=(-1,0)$ è l'estremo destro $P=(1,0)$ è l'estremo sinistro, allora (S,P,Q) è un arco orientato.

Se $R=(x,y)\in S$ quanto fa $\hat{T}(R)$??





Per trovare $\hat{T}(x,y)$ devo (1) prendere una parametrizzazione.
per esempio $\gamma(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ $0\le\theta\le\pi$

(2) trovare θ_0 : $\cos\theta_0=x$ $\sin\theta_0=y$

(3) calcolare $\gamma'(\theta_0)=(-\sin\theta,\cos\theta)\big|_{\theta=\theta_0}=(-\sin\theta_0,\cos\theta_0)$

$=(-y,x)$

DUNQUE se $(x,y)\in S \Rightarrow \hat{T}(x,y)=(-y,x)$

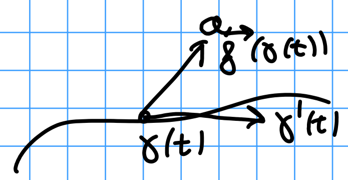
Se rifacessi tutto con $\gamma_1(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$ troverei lo stesso

DEF (INTEGRALE CURVILINEO DI II specie)

- Sia $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^N$ una curva C^1, sia $S=\gamma([a,b])$ il sostegno di γ, e sia $\vec{f}:S\to\mathbb{R}^N$ continua

$\vec{f}$ è un campo di vettori (dimensione in partenza = dim in arrivo)

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} =: \int_a^b \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$



"MORALMENTE" sto integrando la componente di $\vec{f}(\gamma(t))$ lungo la retta tangente in $\gamma(t)$

- VERSIONE per gli archi orientati:

(S, P, Q) arco orientato. $\vec{f}: S \to \mathbb{R}^N$ continua

Definisco

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad \left(= \int_{(S,P,Q)} \vec{f} \cdot d\vec{s} \right) = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad \text{dove}$$

$\gamma : [a,b] \to S$ è una parametrizzazione concorde

<u>OSS.</u>

$$\int_S \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{f} \cdot \hat{T} \, ds$$

INFATTI, se γ è concorde,

$$\underbrace{\int_S \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt}_{(\star)} = \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}_{\hat{T}(\gamma(t))} \|\gamma'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b \left(\vec{f} \cdot \hat{T}\right)(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| dt = \int_\gamma \vec{f} \cdot \hat{T} \, ds$$

(se faccio così non introduco un'altra def di integrale -
PERÒ È COMODA LA DEF. $(\star)$)

<u>Per esempio</u> S = arco di circonferenza di prima

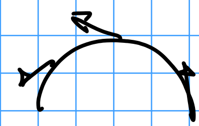
$$\vec{f}(x,y) = (x+y, \, x-y) \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$= (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$$

se convengo che $\vec{i} = \hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{j} = \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Su S considero il verso di prima ("antiorario")

$$\left(\hat{T}(x,y) = (-y, x) \right)$$



$$\int_S \Big(\underbrace{(x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}}_{\vec{g}} \Big) \cdot d\vec{s}$$ (sto sottintendendo il verso)

USO $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ $\quad 0 \le \theta \le \pi$ $\quad \begin{pmatrix} \gamma'(\theta) = \\ (-\sin\theta, \cos\theta) \end{pmatrix}$

(vedo che è concorde perché $\gamma(0) = (1,0)$, $\gamma(\pi) = (-1,0)$)

DUNQUE $\displaystyle\int_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_0^\pi \vec{g}(\cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j})\, d\theta$

$$\int_0^\pi \Big(\underbrace{(\cos\theta + \sin\theta)\vec{i} + (\cos\theta - \sin\theta)\vec{j}}_{\vec{g}(\gamma(\theta))} \Big) \cdot \Big(\underbrace{-\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}}_{\gamma'(\theta)} \Big) d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left(-\cos\theta \sin\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta - \cos\theta \sin\theta \right) =$$

$$= \int_0^\pi \left(-2 \sin\theta \cos\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \right) d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \left(-\sin(2\theta) + \cos(2\theta) \right) d\theta = \left[\frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^\pi$$

$$= \Bigg(\underbrace{\frac{\cos(2\pi)}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{\sin(2\pi)}{2}}_{=0} - \underbrace{\frac{\cos(0)}{2}}_{-\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{\sin(0)}{2}}_{=0} \Bigg) = 0$$

ANCHE L'INTEGRALE DI II° NON DIPENDE DA γ

– PURCHÉ γ sia concorde. CIOÈ:

γ_1 riparametrizzato di γ, γ_1 concorde a γ $(\varphi' \geq 0)$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

Se invece γ_1 è discorde

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI (le solite)

- linearità $\int_\gamma (\lambda \vec{f} + \mu \vec{g}) \cdot d\vec{s} = \lambda \int \vec{f} \cdot d\vec{s} + \mu \int \vec{g} \cdot d\vec{s}$

  (lo stesso per gli int. di I° specie)

- monotonia: $f \geq g$ $\int_\gamma f \, ds \geq \int_\gamma g \, ds$

- $$\left| \int_\gamma f \, ds \right| \leq \max_{x \in S} |f(x)| \cdot \ell(\gamma) \quad \left(S = \text{sostegno di } \gamma \right)$$

  $$\left(\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \right)$$

ADDITIVITÀ rispetto al dominio:

$\gamma : [a, c] \to S$ C^1. Prendo $b \in [a, c]$

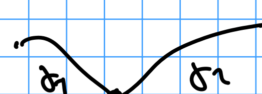
Posso considerare $\gamma_1 = \gamma|_{[a,b]}$ $\gamma_2 = \gamma|_{[b,c]}$

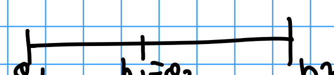
Allora $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$

INCOLLAMENTO DI CURVE (ARCHI)

Def. Date due curve $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^N$ $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^N$ dico che sono CONSECUTIVE, se

$b_1 = a_2$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$





Definisco, in questo caso, $\gamma := \gamma_1 \vee \gamma_2$ ponendo

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & a_1 \le t \le b_1 \\ \gamma_2(t) & a_2 \le t \le b \end{cases}$$

$(=)$

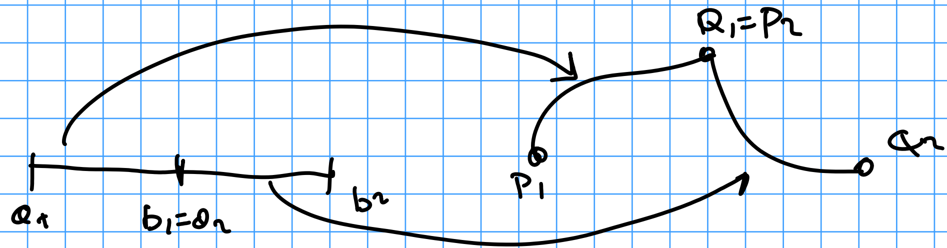
<u>Def.</u> S_1 S_2 due archi regolari. Dico che sono consecutivi se hanno un estremo in comune.

$\{P_1, Q_1\}$ estremi di S_1

$\{P_2, Q_2\}$ estremi di S_2

deve essere $P_1 = P_2$ / $P_1 = Q_2$

$Q_1 = P_2$ / $Q_1 = Q_2$



Per esempio supponiamo $Q_1 = P_2$

Posso trovare $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to S_1$ parametrizzazione con $\gamma_1(a_1) = P_1$

$\gamma_1(b_1) = Q_1$, $\gamma_2 : [a_2, b] \to S_2$ " " con $\gamma_2(a_2) = P_2$, $\gamma_2(b_2) = Q_2$

A meno di un cambio di parametro posso fare in modo che $b_1 = a_2$

ALLORA $S = S_1 \cup S_2$ è parametrizzato da $\gamma_1 \vee \gamma_2$

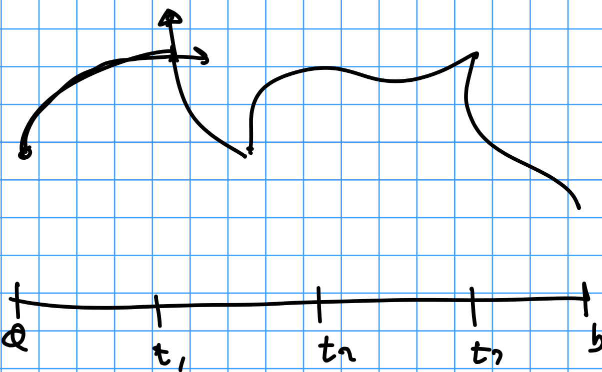
S non è più un arco regolare. Diremo che è "regolare a tratti". Analogamente se γ_1 e γ_2 sono regolari e consecutive $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ non è più regolare, diremo che è regolare a tratti

PIÙ IN GENERALE

Dico che $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è <u>regolare</u> a tratti se

γ è continua ed esistono $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$

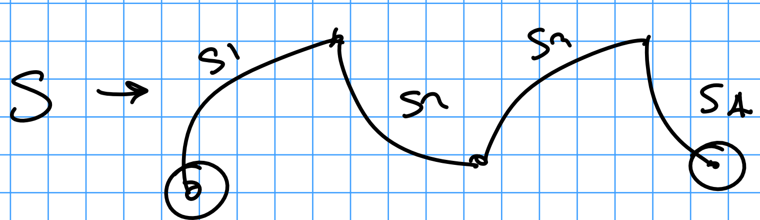
tali che $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ sia di classe C^1 e $\gamma' \neq 0$



($\Rightarrow$ nei punti $t_1 \dots t_{k-1}$ esistono $\gamma'_+(t_i)$ e $\gamma'_-(t_i)$ ma non è detto che siano uguali tra loro.

<u>MODO EQUIVALENTE</u>: γ è C^1 (regolare) a tratti se $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_k$ dove le γ_i sono curve C^1 (regolari) consecutive.

- IN MODO SIMILE DICO CHE S è un arco regolare a tratti se $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ dove S_i sono archi regolari e "si possono incollare"

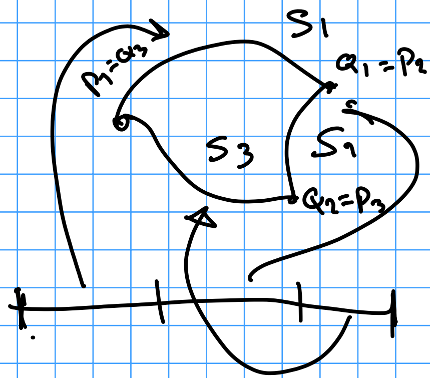


(Gli estremi di S sono un estremo di S_1 e un estremo di S_k che non siano incollati)

$\Longleftrightarrow$ S è sostegno di una γ regolare a tratti

- Anche per gli archi regolari a tratti posso definire l'orientazione facendo una scelta del I° estremo e del II° estremo

POTREBBE SUCCEDERE CHE IL PRIMO "ESTREMO DI S_1" e l'ultimo di S_k COINCIDANO TRA LORO.

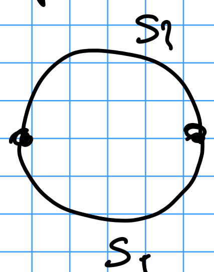


IN QUESTO CASO DICO CHE S è un arco chiuso e che S NON HA ESTREMI

$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ è chiuso

DUNQUE UN ARCO PUÒ → AVERE DUE ESTREMI
→ NON AVERE ESTREMI (IN QUESTO CASO È CHIUSO)

Per esempio $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$ è un arco chiuso



$S = \underbrace{\{x^2+y^2=1,\ y \geq 0\}}_{S_2} \cup \underbrace{\{x^2+y^2=1,\ y \leq 0\}}_{S_1}$

#