Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 13 23/10/2023

VISTO $\displaystyle\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ $\quad f$: sostegno di $\gamma \to \mathbb{R}$ $\quad$, γ è C^1
f continua

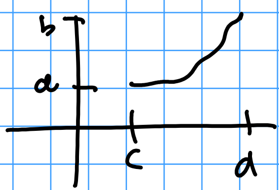
$$\left(\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma 1\,ds \right)$$

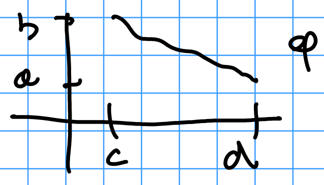
__Teorema__ Se $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ è un cambio di parametro (φ biiettiva) ed è C^1, e se $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ è dato da $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$

ALLORA
$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$$
(qualunque f definita su sostegno(γ) = sostegno(γ_1))

__Dim.__
$$\int_{\gamma_1} f\,ds \underset{(\text{per def.})}{=} \int_c^d f(\gamma_1(s))\,\|\gamma_1'(s)\|\,ds \underset{(\text{def. di } \gamma_1)}{=}$$
$$\int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\,\left\|\frac{d}{ds}\gamma(\varphi(s))\right\|\,ds = \qquad \left(\frac{d}{ds}\gamma(\varphi(s)) = \gamma'(\varphi(s))\,\varphi'(s)\right)$$
$$\int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\,\|\gamma'(\varphi(s))\|\,|\varphi'(s)|\,ds = (*)$$

Dato che φ è biiettiva tra due intervalli $\Rightarrow$ sono possibili due casi:
- φ strett. crescente $\Rightarrow \varphi' \geq 0$ e $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$
- φ strett. decrescente $\Rightarrow \varphi' \leq 0$ e $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) = a$





Nel primo caso
$$(*) \underset{\varphi(d)=b}{=} \int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\,\|\gamma'(\varphi(s))\|\,\varphi'(s)\,ds = \qquad \left(\begin{array}{l}\text{cambio di} \\ \text{variabile } t = \varphi(s) \\ dt = \varphi'(s)\,ds\end{array}\right)$$
$$= \int_{\varphi(c)=a} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma f\,ds$$

Nel secondo caso

$$(*) = -\int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\,\|\gamma'(\varphi(s))\|\,\varphi'(s)\,ds = \left(\begin{array}{c}\text{come prima}\\ t=\varphi(s)\end{array}\right)$$

$$= -\int_{\varphi(c)=b}^{\varphi(d)=a} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \int_\gamma f\,ds \qquad \#$$

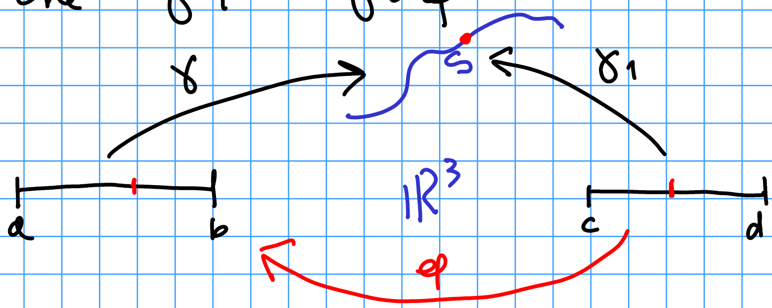
OSS Si può dimostrare quanto segue

Siano γ e γ_1 sono due curve continue

$$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3,\quad \gamma_1:[c,d]\to\mathbb{R}^3$$

e INIETTIVE con lo stesso sostegno $S = \gamma([a,b]) = \gamma_1([c,d])$

ALLORA $\exists\ \varphi$ continua e biettiva, $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ tale che $\gamma_1 = \gamma\circ\varphi$

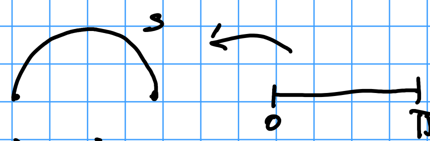


Se γ e γ_1 sono C^1 $\Rightarrow$ φ è C^1 (e φ^{-1} è C^1)

Questa osservazione permette un'altra possibile definizione di curva

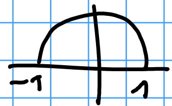
Def. (ALTERNATIVA). $S\subset\mathbb{R}^N$. Dico che S è una curva (in $\mathbb{R}^N$) se esiste $\gamma:[a,b]\to S$ iniettiva e continua. Dico che γ è una "parametrizzazione" di S.
Dico che S è una curva C^1 (o C^k) se esiste una parametrizzazione γ di classe C^1 (o C^k).

• Per esempio $S = \{x^2+y^2=1 \quad y\geq 0\}$ è una curva (in $\mathbb{R}^2$) perché trovo $\gamma(t)=(\cos(t), \sin(t))$ per $t\in[0,\pi]$



S ha altre parametrizzazioni; per esempio

$$\gamma_1(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \qquad -1 \le t \le 1$$



Da quanto detto prima l'integrale su γ NON DIPENDE dalla parametrizzazione, per cui lo posso indicare con

$$\int_S f\, ds \qquad \left(= \int_\gamma f\, ds \text{ per una qualunque parametrizzazione } \gamma \right)$$

VEDIAMO, PER ESEMPIO, che $\ell(S)$ si può calcolare usando una delle due parametrizzazioni sopra

$S = \{x^2+y^2=1,\ y \ge 0\}$

(1) uso $\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad 0 \le \theta \le \pi$

$$\gamma'(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$\|\gamma'(\theta)\| = (-\sin(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2 = 1$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^\pi 1\, d\theta = \pi$$

(2) uso $\gamma_1(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$. (questa γ_1 è $C^1(]a,b[)$, non è $C^1([a,b])$)

$$\Rightarrow \gamma_1'(t) = \left(1, \frac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$\|\gamma_1'(t)\|^2 = 1 + \frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{1-t^2} \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Devo calcolare $\displaystyle\int_0^1 \|\gamma_1'(t)\|\, dt = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

(potrei calcolare questo integrale con la sostituzione $t = \sin\theta$ – così mi riconduco al caso (1)) OPPURE NOTO CHE $\displaystyle\frac{d}{dt}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ e dunque

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\left[\arcsin(t)\right]_0^1 = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi$$

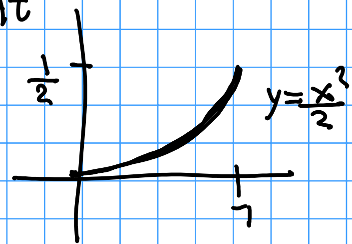
(come prima..)

<u>ES</u> Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, con g C^1. Sia G_g il grafico di g = $G_g := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ y = g(x)\}$

Allora G_g è una <u>curva</u> che ammette come parametrizzazione $\gamma(t) := (t, g(t)) \Rightarrow \gamma'(t) = (1, g'(t))$

In questo caso $\displaystyle\int_{G_g} f\, ds = \int_a^b f(t, g(t))\sqrt{1+g'(t)^2}\,dt$

Per es. $\displaystyle\ell(G_g) = \int_a^b \sqrt{1+g'(t)^2}\,dt$



ESEMPIO $\quad g(x) = \dfrac{x^2}{2} \quad 0 \le x \le 1$

$$S\,(= G_g) = \{(x, x^2/2) : 0 \le x \le 1\}$$

$\displaystyle\ell(S) = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$. Per calcolare questo int.

si può (a) usare $x = \sinh(t)$ .... oppure

(b) (trucco mediante int. per parti)

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int_0^1 x\,\underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}_{\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \Big[\operatorname{arcsinh}(x)\Big]_0^1 + \underbrace{\Big[x\sqrt{1+x^2}\Big]_0^1}_{\text{per parti}} - \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx}_{\text{lo riporto a SX}}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2} = \operatorname{arcsinh}(1) + \sqrt{2} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \frac{\operatorname{arcsinh}(1) + \sqrt{2}}{2}$$