Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 12   18/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Alcuni esempi di limiti / continuità:

(1) Definisco $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ponendo $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$; pongo $f(0,0) = 0$.

Mi domando se f è continua in $(0,0)$ (è chiaro che f è continua nei punti $(x,y) \neq (0,0)$)

DUNQUE DEVO VEDERE se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Se f avesse limite ℓ, ma $\ell \neq 0$ NON SAREBBE CONTINUA ma se ridefinissi $f(0,0) = \ell$ lo diventerebbe

FACCIO UN TEST sulle rette (questo mi dà certezza se l'esito è negativo. Se invece sulle rette trovo un limite NON È DETTO che il limite in (x,y) esista)

Dunque prendo un vettore $\vec{v} = (v_x, v_y)$ e faccio

$$\lim_{t\to 0} f(t\vec{v}) = \lim_{t\to 0} f(tv_x, tv_y) = \lim_{t\to 0} \frac{(tv_x)(tv_y)}{(tv_x)^2+(tv_y)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2}\, v_x v_y}{\cancel{t^2}\,(v_x^2+v_y^2)} = \frac{v_x v_y}{v_x^2+v_y^2} \leftarrow$$ NON È ZERO E IN OGNI CASO DIPENDE DA (v_x, v_y)

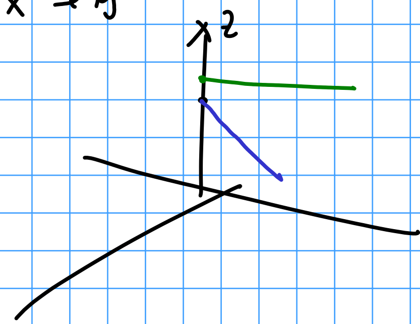
$\Longrightarrow$ il <u>limite NON ESISTE</u> da cui

f NON È CONTINUA IN $(0,0)$ e NON È NEANCHE POSSIBILE RENDERLA CONTINUA MODIFICANDO $f(0,0)$

OSSERVIAMO CHE f è LIMITATA, infatti

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x,x) = \frac{1}{2} \quad = \quad f(x,-x) = -\frac{1}{2}$$



$$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$
$\uparrow$

$$\underbrace{-x^2-y^2 \leq 2xy}_{-(x^2+y^2)\leq 0} \quad \underbrace{2xy \leq x^2+y^2}_{0 \leq (x-y)^2}$$

(2) $$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$ ($f(0,0)=0$ oppure non definisco $f(0,0)$ e vedo se esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$)

vedo se f ha limite per $(x,y)\to(0,0)$

<u>TEST</u> sulle rette (serve a individuare il possibile limite)

$$\underset{(v_x,v_y)\neq(0,0)}{f(tv_x, tv_y)} = \frac{(tv_x)(tv_y)^2}{(tv_x)^2+(tv_y)^4} = \frac{t^{\cancel{3}}\, v_x v_y^2}{\cancel{t^2}\,(v_x^2+t^2v_y^4)} \qquad t\neq 0$$

(il denominatore $v_x^2 + t^2 v_y^4$ è $\neq 0$ se $t \neq 0$, perché
v_x e v_y non possono essere entrambi zero)

(perché $\dfrac{v_x v_y^2}{v_x^2 + t^2 v_y^4} \to \dfrac{v_y^2}{v_x}$

METTE IN GUARDIA

$$\lim_{t \to 0} t \, \frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + t^2 v_y^4} = \begin{cases} 0 & \text{se } v_x \neq 0 \\ = 0 & \text{anche se } v_x = 0 \end{cases}$$

perché in questo caso $\dfrac{v_x v_y^2}{v_x^2 + t^2 v_y^4} = 0$ per ogni $t \neq 0$

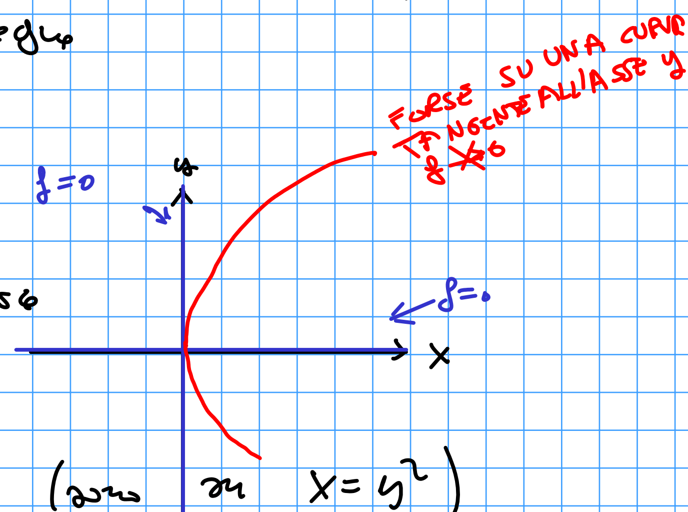
DUNQUE sulle rette trovo che il limite fa zero

DEVO CHIEDERMI SE

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$$

In termini di successioni dovrei vedere se,
date $x_n \to 0$ $y_n \to 0$ ne segue

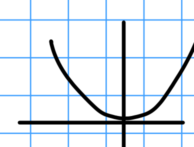
$$\frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^4} \to 0$$



Quello che ho dovuto sopra suggerisce

Proviamo a fare $f(t^2, t)$ (sono su $x = y^2$)

$$f(t^2, t) = \frac{\overset{x}{t^2} \, \overset{y^2}{t^2}}{\underset{x^2}{t^4} + \underset{y^4}{t^4}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

($y = x^2$ )

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} f(t^2, t) = \frac{1}{2}$$

N.B. $\lim_{t \to 0} (t^2, t) = (0,0)$

dunque non è possibile che $\lim_{(x,y) \to (0,0)} = 0$

ANZI IL LIMITE NON ESISTE.

OSSERVIAMO CHE se $g(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ (la f del primo esempio)

si ha $f(x,y)=g(x,y^2)$ . . .

(3) $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^4}$ vediamo se ha limite

TEST sulle rette $f(tv_x,tv_y)=\frac{t^3v_x^2v_y}{t^2(v_x^2+t^2v_y^4)}$

$$= t\frac{v_x^2v_y}{v_x^2+t^2v_y^4}$$

$\to 0$ se $v_x\neq 0$ perché $\frac{v_x^2v_y}{v_x^2+t^2v_y^4}\to v_y$

sembra meglio

$\to 0$ anche se $v_x=0$ perché $\frac{v_x^2v_y}{v_x^2+t^2v_y^4}=0$

Sembrerebbe più probabile che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

$$|f(x,y)|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| \le |y|$$

OSSERVO CHE $\frac{x^2}{x^2+y^4}\le 1$ DUNQUE

Ne deduco che il limite fa zero, dato che $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$

Se definisco $f(0,0)=0 \Rightarrow f$ è continua in $(0,0)$.

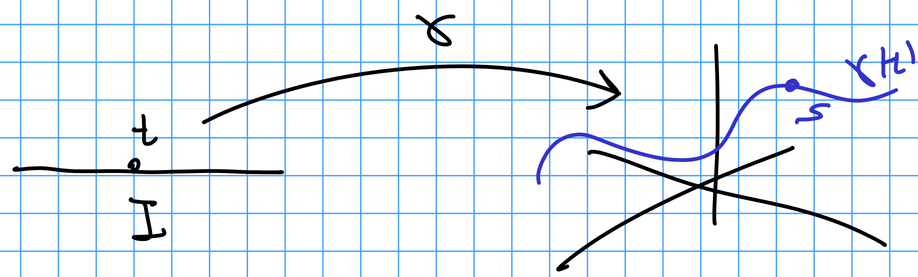
CURVE

Def. Chiamo curva una funzione $\gamma: I\to\mathbb{R}^N$ CONTINUA dove $I\subset\mathbb{R}$ è un intervallo

$\gamma(t)=(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_N(t))$

Chiamo SOSTEGNO di γ l'insieme

$$\gamma(I) = \{ \gamma(t) : t \in I \} = \{ x \in \mathbb{R}^N : \exists\, t \in I \text{ per cui } x = \gamma(t) \}$$

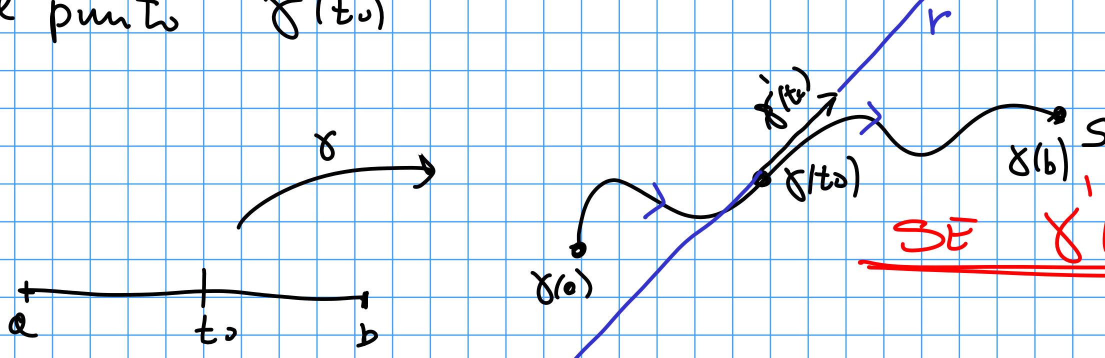


- Se $I = [a, b]$ dico che $\gamma(a)$ è l'estremo sinistro e $\gamma(b)$ è l'estremo destro di γ.
- Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ dico che γ è una curva chiusa
- Dico che γ è di classe C^k $(k \geq 0)$ se ogni componente γ_i è di classe C^k cioè ammette derivate fino alla k-esima continua (C^0 = continua)
- Se γ è C^1 la derivata di γ, che si indica con $\gamma' = (\gamma_1', \dots, \gamma_N')$ "rappresenta la velocità" di γ ...: $\gamma'(t)$ è la velocità di γ all'istante t.

Sia $t_0 \in I$. La retta (parametrica)

$$r = \{ \gamma(t_0) + t\, \gamma'(t_0) : t \in \mathbb{R} \}$$

rappresenta la "retta tangente" al sostegno $S = \gamma(I)$ nel punto $\gamma(t_0)$



SE $\gamma'(t_0) = 0$

DEF. Dico che γ è una curva regolare se γ è C^1 e $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$

Se γ è regolare allora per ogni punto del sostegno esiste la retta tangente.

<u>ESEMPIO</u> $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) := (t^2, t^3) \qquad (-1 \leq t \leq 1)$$

γ è C^1, MA NON È REGOLARE – INFATTI

$\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$ che si annulla in $t=0$.

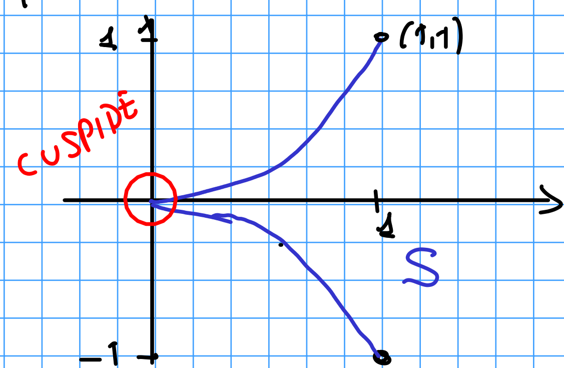
l'estremo sinistro è $(1, -1)$ l'estremo destro è $(1, 1)$

Cerchiamo di "disegnare" il sostegno di γ.

Se $t \geq 0$ $\quad x = t^2 \quad y = t^3 \iff t = \sqrt{x} \quad y = (\sqrt{x})^3$

$\iff 0 \leq x \leq 1, \quad y = x^{3/2}$

Dunque se t varia tra 0 e 1 $\gamma(t)$ percorre il grafico della funzione $y = x^{3/2}$ $\quad 0 \leq x \leq 1$



Se $-1 \leq t \leq 0$, e se

$x = t^2 \quad y = t^3 \iff$

$t = -\sqrt{x}, \quad y = -(\sqrt{x})^3 = -x^{3/2}$

Dunque se $-1 \leq t \leq 0$ la curva descrive il grafico di $y = -x^{3/2}$ $\quad 0 \leq x \leq 1$

IN $(0,0)$ S NON HA retta tangente (guardando il disegno..)

<u>Def.</u> (Cambi di parametro).

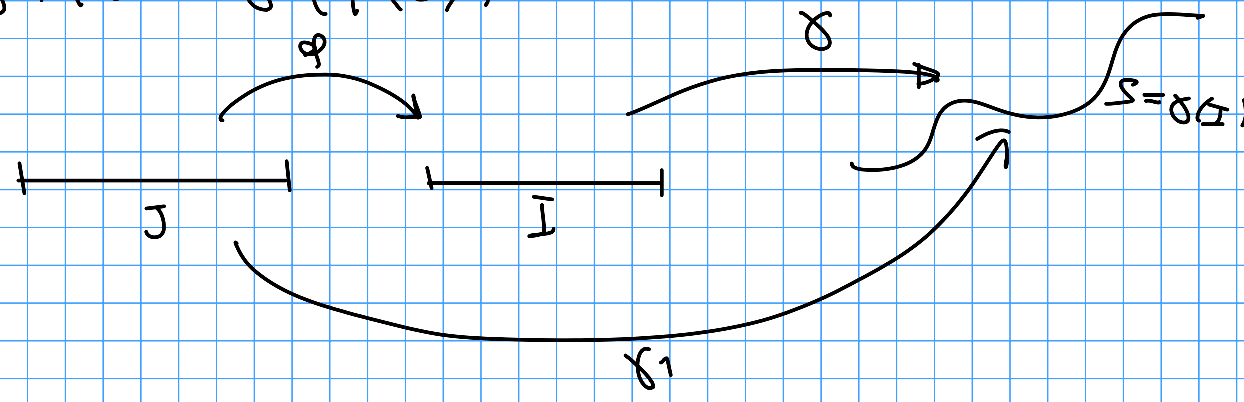
Chiamo "cambio di parametro" una funzione $\varphi : I \to J$ continua e bigettiva.

QUI I (e dunque J) sono intervalli

Se $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\gamma_1 : J \to \mathbb{R}^N$ dico che

γ_1 è una RIPARAMETRIZZATA di γ, mediante φ, se

$$\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$$

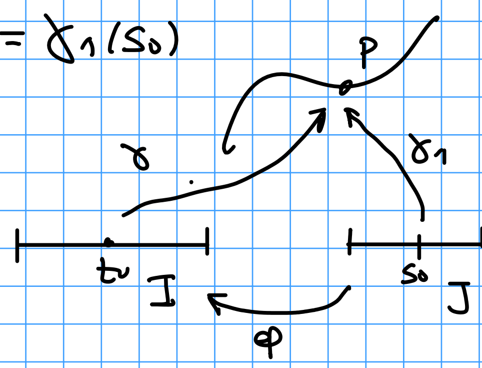


IN QUESTO CASO $\gamma(I) = \gamma_1(J)$: i sostegni sono gli stessi

OSS. Se γ è regolare, se γ_1 è riparametrizzata di γ, se φ è C^1 con $\varphi' \neq 0$ allora anche γ_1 è regolare e danno origine alla stessa retta tangente (se $\varphi' \neq 0 \Rightarrow \varphi' > 0$ oppure $\varphi' < 0$ per motivi di analisi 1)

Infatti: supponiamo che $P = \gamma(t_0) = \gamma_1(s_0)$

$$t_0 = \varphi(s_0) \quad (\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s)))$$



$$\gamma_1'(s_0) = \frac{d}{ds}\gamma(\varphi(s))\Big|_{s=s_0} =$$

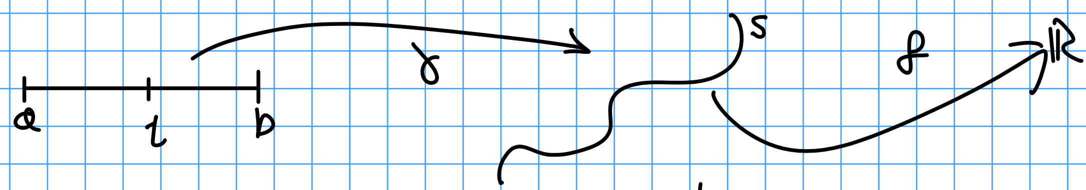
$$\gamma'(\varphi(s_0))\,\varphi'(s_0) = \gamma'(t_0)\,\varphi'(s_0)$$

$$\gamma_1'(s_0) = \underbrace{\varphi'(s_0)}_{\text{numero} \neq 0}\gamma'(t_0)$$ ← $\gamma_1'(s_0)$ e $\gamma'(t_0)$ sono linearmente dip. — DANNO LA STESSA RETTA

DEF (integrale curvilineo di I^a specie).

Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva C^1 e

sia $f : S \to \mathbb{R}$ continua dove $S = \gamma([a,b])$ (il sostegno)



Definisco $\int_\gamma f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt$

$\left(\underline{ds = \|\gamma'(t)\| \, dt} \right)$

Nel caso $f = 1$ quello che trovo, cioè $\int_\gamma 1 \, ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$

si chiama <u>LUNGHEZZA</u> di γ. $\ell(\gamma)$

<u>ESEMPI</u> (a) Dati P e Q in $\mathbb{R}^N$

$$\gamma(t) = tQ + (1-t)P \qquad 0 \le t \le 1$$

Questa curva <u>descrive</u> il segmento da P a Q

$\gamma(0) = P$ $\gamma(1) = Q$. γ è C^1 e $\gamma'(t) = Q - P$

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^1 \|Q-P\| \, dt = \|P-Q\|$$

(b) $\gamma(t) = \big(R\cos(t), R\,\mathrm{sen}(t)\big) \qquad 0 \le t \le 2\pi$

γ da $[0, 2\pi]$ in $\mathbb{R}^2$.

γ descrive la circonferenza di raggio R e centro $(0,0)$.

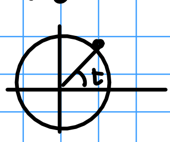
Infatti $\|\gamma(t)\| = \sqrt{\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2} =$

$$\sqrt{R^2\cos^2(t) + R^2\sin^2(t)} = R$$

in altri termini $\gamma(t)$ "viaggia" sulla circonferenza $\{x^2+y^2=R^2\}$

Viceversa, preso (x,y) con $x^2+y^2=R^2$ so

che esiste $t \in [0, 2\pi[$ per cui $\cos(t) = \frac{x}{R}$ $\sin(t) = \frac{y}{R}$



- γ è iniettiva su $[0, 2\pi[$, $\gamma(0)=\gamma(2\pi)$ γ è CHIUSA

γ è C^1 e $\gamma'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$

$$\|\gamma'(t)\| = R \quad \forall t \implies \ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$$

(3) Proviamo a calcolare la lunghezza di

$$\gamma(t) = (t^2, t^3) \quad -1 \le t \le 1$$

HO $\gamma'(t) = (2t, 3t^2) \implies$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t|\sqrt{4+9t^2}$$

DUNQUE $\ell(\gamma) = \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{4+9t^2}\, dt = 2\int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\, dt$

$(s = t^2 \quad ds = 2t\,dt)$ $= \int_0^1 \sqrt{4+9s}\, ds = \left[\frac{2}{3}(4+9s)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{9}\right]_0^1$

$$\frac{2}{27}\left(13^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{2}{27}\left(13^{3/2} - 8\right)$$