Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

# Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

## Lezione 11 17/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua , $c \in \mathbb{R}$

considero gli insiemi

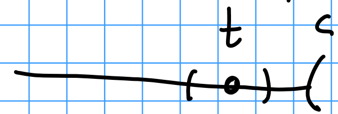
$\underline{\{f < c\}} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < c\}$ ← aperto (sottolivello aperto)

$\underline{\{f \leq c\}}$ , $\underline{\{f = c\}}$ ← chiusi (sottolivello chiuso/insieme di livello)

perché $\{f < c\} = f^{-1}(]-\infty, c[)$ e $\underline{]-\infty, c[ \text{ aperto}}$

mentre $]-\infty, c]$ è chiuso , $\{c\}$ è chiuso

(il fatto che $]-\infty, c[$ sia aperto e $]-\infty, c]$ , $\{c\}$ siano chiusi in $\mathbb{R}$ è un esercizio ...)




INOLTRE

(i) $\{f < c\} \subset \underline{\{f \leq c\}} \Rightarrow \overline{\{f < c\}} \subset \overline{\{f \leq c\}} = \{f \leq c\}$

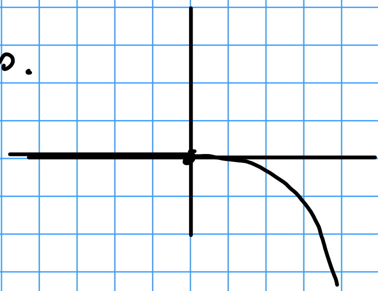
DUNQUE $\overline{\{f < c\}} \subset \{f \leq c\}$

(ii) $\{f < c\} \subset \{f \leq c\} \Rightarrow \mathring{\widehat{\{f < c\}}} \subset \mathring{\widehat{\{f \leq c\}}} \Rightarrow$

DUNQUE $\{f < c\} \subset \mathring{\widehat{\{f \leq c\}}}$

PUÒ NON ESSERCI L'EGUAGLIANZA TRA QUESTI INSIEMI

Per es.



$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{se } x\geq 0 \\ 0 & \text{se } x\leq 0 \end{cases} \qquad \text{È CONTINUA}$$

$$\{f<0\} = ]0,+\infty[$$

$$\{f\leq 0\} = \mathbb{R} = ]-\infty,+\infty[$$

$$\mathring{\overbrace{\{f\leq 0\}}} = ]-\infty,+\infty[ \neq \{f<0\}$$

$$\overline{\{f<0\}} = [0,+\infty[ \neq \{f\leq 0\}$$

VEDIAMO LE FRONTIERE

$$\partial\{f<c\} = \overline{\{f<c\}} \setminus \mathring{\overbrace{\{f<c\}}} = \overline{\{f<c\}}\setminus\{f<c\} \subset \{f\leq c\}\setminus\{f<c\}$$

è aperto $\Rightarrow$ coincide con la sua parte interno

$$\{f\leq c\}\setminus\{f<c\} = \{f=c\}$$

$$\partial\{f<c\} \subset \{f=c\} \qquad \text{se } f \text{ è continua}$$

Analogamente

$$\partial\{f\leq c\} = \overline{\{f\leq c\}} \setminus \mathring{\overbrace{\{f\leq c\}}} = \{f\leq c\}\setminus \mathring{\overbrace{\{f\leq c\}}} \subset \{f\leq c\}\setminus\{f<c\} = \{f=c\}$$

chiuso $\Rightarrow$ coincide con la sua chiusura

$$\left(\{f<c\} \subset \mathring{\overbrace{\{f\leq c\}}}\right)$$

di nuovo $\partial\{f\leq c\} \subset \{f=c\}$ se $f$ è continua

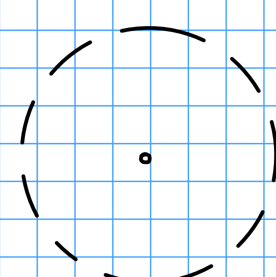
(stessi discorsi per $\{f>c\}$ $\{f\geq c\}$)

ESERCIZIO

$$A = \{0 < x^2+y^2 < 1\}$$

$$B = \{x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$C = \{x^2+y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$$



Sicuramente $A$ è aperto $B, C$ sono chiusi

(perché $f(x,y)=x^2+y^2$ è continua)

$A=\{f<1\}\cap\{f>0\}$ ← INTERSEZIONE DI APERTI ⇒ APERTO

$B=\{f\le 1\}$ è chiuso

$C=\{f=1\}\cup\{f=0\}$ ← UNIONE DI CHIUSI ⇒ CHIUSO

• Chi è $\partial A$ ?? DICO CHE $\partial A = C$

Vediamo che $\boxed{C\subset\partial A}$. Questo va fatto in due passi

(1) $(0,0)\in\partial A$

(2) se $x_0^2+y_0^2=1 \Rightarrow (x_0,y_0)\in\partial A$

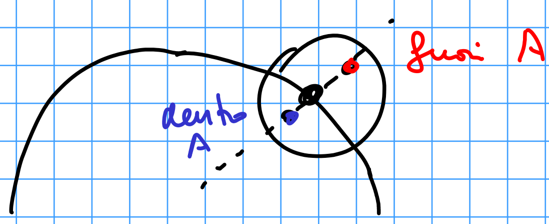
dim.(1) se prendo $r>0$ trovo che

$(0,0)\in B((0,0),r)$ e $(0,0)\notin A$

$(0,r/2)\in B((0,0),r)$ e $(0,r/2)\in A$ (se $r<1$)

$\Leftrightarrow$ ogni intorno di $(0,0)$ contiene un punto di $A$ e un punto fuori di $A$ $\Rightarrow (0,0)\in\partial A$

(2) SI RIPETE IL RAGIONAMENTO della dim. $\partial B(0,1)=S(0,1)$




DUNQUE $S(0,1)\in\partial A$

$$\left(\partial A\cap B\subset\left(\partial A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\partial B\right)\right)$$

MI SERVE ORA $\partial A\subset C$

$$\partial\left(\{f<1\}\cap\{f>0\}\right)\subset\left(\partial\{f<1\}\cap\overline{\{f>0\}}\right)\cup\left(\overline{\{f<1\}}\cap\partial\{f>0\}\right)$$

$$\subset\left(\{f=1\}\cap\cancel{\{f\ge 0\}}\right)\cup\left(\cancel{\{f\le 1\}}\cap\{f=0\}\right)$$

$$\{f=1\}\cup\{(0,0)\}=C$$

IN GENERALE, se $f_1 \dots f_K$ sono continue allora

$$\partial\{f_1<0, \dots f_K<0\} \subset$$
$$\{f_1=0,\ f_2\le 0 \dots f_K\le 0\} \cup \{f_1\le 0,\ f_2=0,\ f_3\le 0 \dots f_K\le 0\}$$
$$\dots \cup \{f_1\le 0 \dots f_K=0\}$$

IN MODO PIÙ SINTETICO

$$\partial \bigcap_{i=1}^{K}\{f_i<0\} \subset \bigcup_{i=1}^{K}\{f_i=0,\ f_j\le 0 \text{ se } i\ne j\}$$

STESSA COSA se prendo i "$\le$":

$$\partial \bigcap_{i=1}^{K}\{f_i\le 0\} \left(= \bigcup_{i=1}^{K} \partial\{f_i\le 0\}\cap\{f_j\le 0\ j\ne i\}\right) \subset$$
$$\bigcup_{i=1}^{K}\{f_i=0,\ f_j\le 0\ \ i\ne j\}$$

Nel nostro caso (LO RIPETO ..)

$$\partial\{0<x^2+y^2<1\} \subset \{x^2+y^2=0,\ x^2+y^2\le 1\}\cup\{0\le x^2+y^2=1\}$$
$$= \{x^2+y^2=1\}\cup\{(0,0)\}$$

# IN DEFINITIVA $\partial A = C$

Da questo segue che

$B$ è la chiusura di $A$, infatti $B = A\cup C$
$= \mathring{A}\cup\partial A$

- INVECE È FALSO CHE $\partial B = C$. INFATTI

$$\partial B = \{x^2+y^2=1\}$$ come avevamo già visto

FINE ESERCIZIO

## TEOREMA DI WEIERSTRASS

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua dove $A \subset \mathbb{R}^N$ è un insieme limitato e chiuso (DUNQUE COMPATTO), allora $f$ ammette massimo e minimo CIOÈ esistono $x'$ e $x'' \in A$ (detti pti di min / max) tali che

$$\underbrace{f(x')}_{\min_A f} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x'')}_{\max_A f} \qquad \forall x \in A$$

Dim. CASO DEL MINIMO (A) È vero un fatto:

se $\lambda = \inf_A f = \inf\{f(x) : x \in A\}$ $(\lambda \in [-\infty, +\infty[)$

allora esiste una succ. $(x_n)$ in $A$ tale che $f(x_n) \to \lambda$

Questa proprietà si ricava dalle proprietà dell'estremo inferiore:

CASO $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda \leq f(x) \quad \forall x \in A$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A$ t.c. $\lambda + \varepsilon > f(x)$

Scelgo $\varepsilon = 1/n$ e trovo $x_n \in A$ per cui

$$\lambda \leq f(x_n) \leq \lambda + 1/n$$

QUESTO IMPLICA CHE $f(x_n) \to \lambda$ (caso $\lambda > -\infty$)

CASO $\lambda = -\infty$ In questo caso so che

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n$ tale che $f(x_n) \leq n$

$\Rightarrow f(x_n) \to -\infty = \lambda$

IN OGNI CASO TROVO $(x_n)$ tale che $f(x_n) \to \lambda = \inf_A f$

(B) Dato che la succ. $(x_n)$ ← PUNTI IN A è contenuta in $A$ che è compatto $\Rightarrow \exists\, (x_{n_k})$ tale che $x_{n_k} \to x'$ con $x' \in A$

← NUMERI REALI

(C) Per la continuità di $f$ ho: $f(x_{n_k}) \to f(x')$

(D) Noto che $\left(f(x_{n_k})\right)$ è una sottosuccessione di $\left(f(x_n)\right)$ e dunque $f(x_{n_k}) \to \lambda$.

PER L'UNICITÀ DEL LIMITE OTTENGO CHE $\lambda = f(x')$

cioè $f(x') = \inf_A f \iff f(x') = \min_A f$

HO DIMOSTRATO L'ESISTENZA DEL MINIMO.

<u>ESEMPIO</u> SIA $A$ una matrice $N \times N$. ($A$ simmetrica)

Chiamo $\varphi(x) = Ax \cdot x = x^t A x$ (la forma quadratica)

DICO CHE $\varphi$ ha massimo e minimo sulla SFERA UNITARIA $S = \{ \|x\| = 1 \}$

BASTA NOTARE CHE $\varphi$ è continua e $S$ è chiuso (insieme di livello di $g(x) = \|x\|$ che è continua) ed è limitato.

DUNQUE esiste $\nu := \min_{\|x\|=1} Ax \cdot x$

si può dim. che $\nu$ = minimo autovalore di $A$ (su questo torneremo quando faremo i problemi di minimo/max sui vincolo)

PIÙ IN GENERALE QUALSIASI FUNZIONE CONTINUA SU $\boxed{S}$ HA max / min.

# WEIESTRASS GENERALIZZATO

$A \subset \mathbb{R}^N$ $\qquad f: A \to \mathbb{R}$ continua

SUPPONIAMO CHE valgono le seguenti proprietà.

(a) Se $x_0 \in \partial A$ ma $x_0 \notin A$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \; (-\infty)$$

(se A è chiuso non ci sono tali $x_0$ ⇒ la proprietà è vera)

(b) Se A non è limitato deve succedere che

$$\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ (x \in A)}} f(x) = +\infty \; (-\infty)$$

ALLORA $f$ ammette minimo (massimo)

IDEA della dim. Come nella dim di Weierstrass si prende una $(x_n) \subset A$ tale che $f(x_n) \to \lambda = \inf_A f$

Se $(x_n)$ NON FOSSE limitata, troverei una $(x_{n_k})$ tale che $\|x_{n_k}\| \to +\infty$ ⇒ (per (b)) $f(x_{n_k}) \to +\infty$

IMPOSSIBILE perché $f(x_{n_k}) \to \lambda < +\infty$

Allora $(x_n)$ ha un'estratta che converge e $x' \in \mathbb{R}^N$

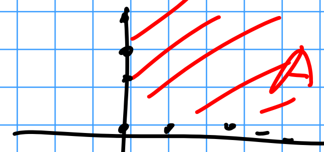
Se $x' \notin A$ ovvero $x' \in \partial A \setminus A$. Ma di nuovo ne seguirebbe $f(x_{n_k}) \to +\infty$ IMPOSSIBILE come prima

⇒ $x' \in A$. Ragionando come nella dim precedente trovo $f(x') = \lim f(x_{n_k}) = \lambda$ cioè

$$f(x') = \min_A f$$

ESEMPIO $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 - \ln(xy)$

definito su $A = \{x>0, y>0\}$




DICO CHE $f$ ha minimo per il Teorema di (W. GEN.)

(a) se $(x_0,y_0) \in \partial A$ VUOL DIRE CHE $x_0 y_0 = 0$ $(x_0 \geq 0, y_0 \geq 0)$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \ln(xy) = -\infty \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$$

(b) DICO CHE $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$

per dimostrarlo cerco una "minorazione" con una $g(x,y)$ di cui è facile vedere che va a $+\infty$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \ln(xy) \qquad ??$$

POSSO USARE LA DIS. $\quad xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln(xy) \leq \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$$

$$f(x,y) \geq \|(x,y)\|^2 - \ln\left(\frac{\|(x,y)\|^2}{2}\right) = g(\|(x,y)\|)$$

dove $g(t) = t^2 - \ln(t^2/2)$

PER A1 so che $\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} t^2\left(1 - \frac{\ln(t^2/2)}{t^2}\right)$

e per de l'Hôpital ho $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t^2/2)}{t^2} = 0$

DA QUESTO (+ COMPOSIZIONE DI LIMITI) ottengo

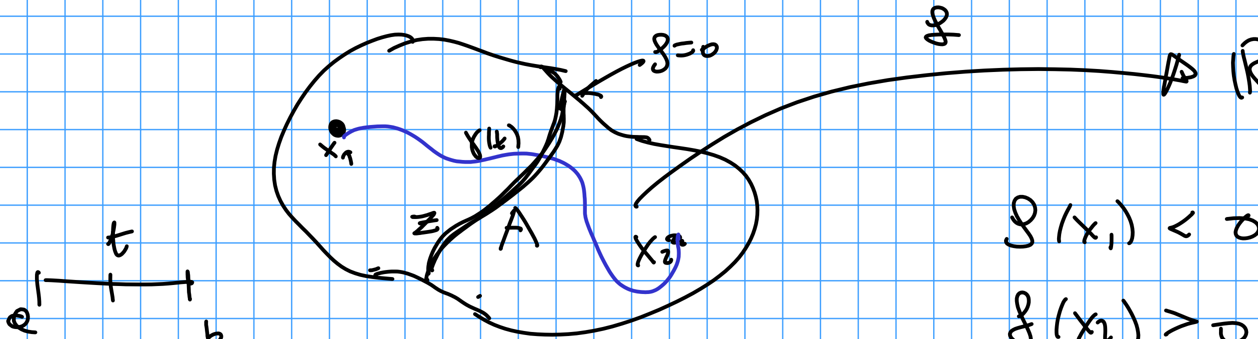
$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} g(\|(x,y)\|) = +\infty \Rightarrow \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$$

DUNQUE $f$ HA MINIMO. PER TROVARLO CI SERVE DELL'ALTRO e rimandiamo la questione.

---

TEOREMA DEGLI ZERI ??

c'è questo risultato che però si deduce dal caso $N=1$




$f(x_1) < 0$

$f(x_2) > 0$

$f : A \to \mathbb{R}$ continua

Ammettiamo che "A SIA CONNESSO PER ARCHI": dati due punti di A esiste una "curva che li congiunge"

CIOÈ $\exists\ \gamma : [a,b] \longrightarrow A$, $\gamma$ continua $\gamma(a) = x_1$, $\gamma(b) = x_2$

Allora ogni curva $\gamma$ in $A$ che congiunge $x_1$ e $x_2$ deve passare per l'insieme $Z = \{x \in A : f(x) = 0\}$

PIÙ PRECISAMENTE

**TEOREMA** Se $A$ è connesso, $f : A \to \mathbb{R}$ continua. $x_1, x_2 \in A$ $f(x_1) < 0$ $f(x_2) > 0$. Allora per ogni $\gamma : [a,b] \to A$ continua con $\gamma(a) = x_1$, $\gamma(b) = x_2$ deve esistere $t \in ]a,b[$ per cui $f(\gamma(t)) = 0$

Dim. Applico il teor. degli zeri a $f(\gamma(t))$

## – PROBLEMA DELLA CONTINUITÀ DI $f^{-1}$

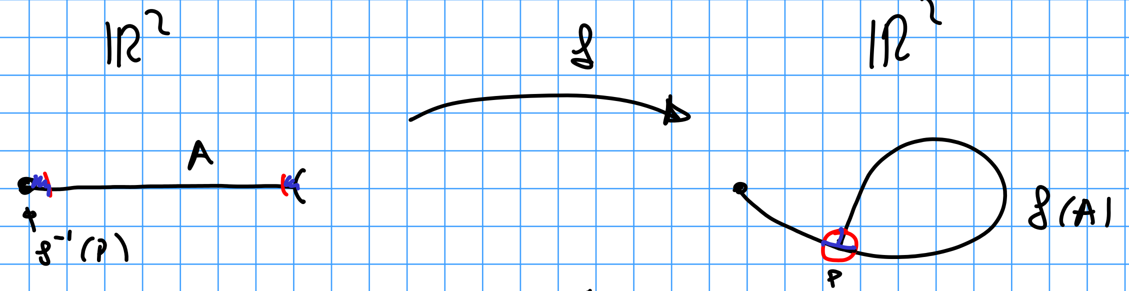
Nel caso $N=1$ ho questo teorema:

<u>Teor.</u> Se $f: I \to \mathbb{R}$ $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f$ continua, $f$ iniettiva $\Longrightarrow$

- $J := f(I)$ è un intervallo
- $f^{-1}: J \to I$ è continua

IN $N \geq 2$ IL PROBLEMA DELLA CONTINUITÀ DI $f^{-1}$ è assai più complicato.

Guarda il disegno:




$f$ è continua MA $f^{-1}: f(A) \to A$ NON È CONTINUA NEL "PUNTO TRIPLO"

<u>TEOREMA</u> Se $f: A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$ <u>COMPATTO</u> e $f$ è continua e iniettiva $\Longrightarrow$
$B := f(A)$ è compatto e $f^{-1}: B \to A$ è continua

VERO MA A NOI SERVIRÀ TANTO