Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 10 16/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Continuità $A \subset \mathbb{R}^N$ $x_0 \in A$ $f : A \to \mathbb{R}^M$

Def. ($A \subset X$ con norma $\| \ \|$ $f : A \to Y$ con norma $\| \ \|_1$)

Dico che f è continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0$ t.c. se $\|x - x_0\| < r$ $x \in A \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_1 < \varepsilon$

$(\|x\| = \|x\|_{\mathbb{R}^N} \quad \|y\|_1 = \|y\|_{\mathbb{R}^M})$

Se $B \subset A$ dico che f è continua su B se f è continua in ogni $x_0 \in B$

Confronto con i limiti Ci sono due possibilità

(a) x_0 isolato in A. Si vede subito che ogni f è continua in x_0

(b) x_0 è di accumulazione per A. Allora f è continua in x_0

$$\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

VARIE PROPRIETÀ (che ricalcano quelle dei limiti)

LIMITI E COORDINATE/COMPONENTI (siano $X = \mathbb{R}^N$ $Y = \mathbb{R}^M$)

(1) f è continua in x_0 $\Longleftrightarrow$

per ogni $i = 1 .. M$ f_i è continua in x_0

(2) Le proiezioni $\pi_i(x) = x_i$ $(i = 1 .. N)$ sono funzioni continue.

LINEARITÀ f, g continue in x_0, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\lambda f + \mu g$ continua in x_0

PRODOTTI f, g continue in x_0 $\Rightarrow$ il prodotto di f per g è continuo in x_0

dove "prodotto" può essere
scalare · vettore
prodotto scalare tra vettori
prodotto vettoriale tra vettori di $\mathbb{R}^3$

QUOZIENTE $f : A \to \mathbb{R}$ continua in x_0, $f(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$

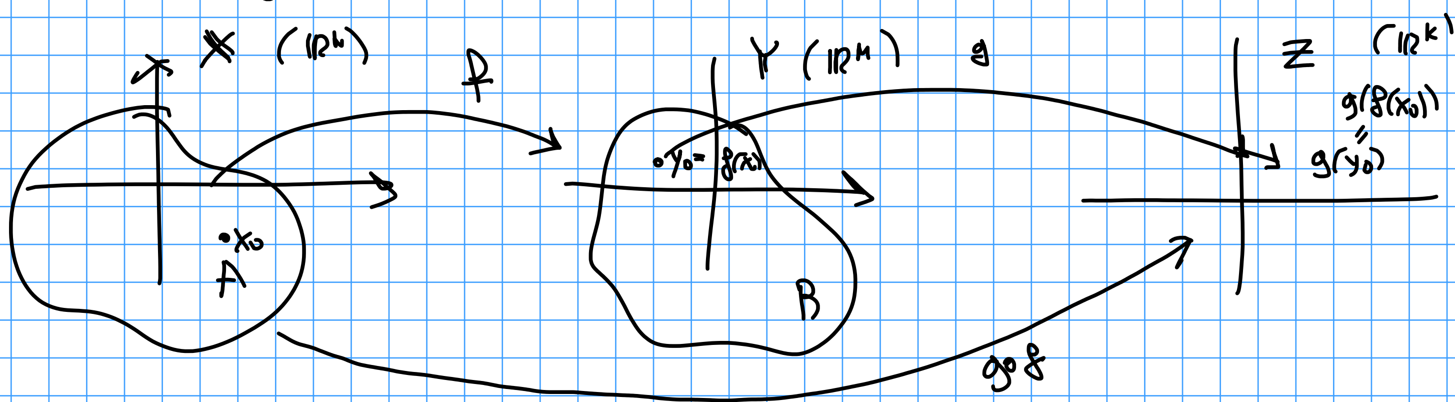
($f(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 e) $\frac{1}{f}$ è continua in x_0

COMPOSIZIONE $f : A \to B$ $g : B \to Z$ (Z un altro spazio con una norma $\|\ \|_Z$ per esempio $\mathbb{R}^K$)

$A \subset X$ $B \subset Y$

$x_0 \in A$ f continua in x_0, $y_0 = f(x_0)$ g è continua in y_0.

$\Rightarrow$ $g \circ f$ ($g \circ f(x) := g(f(x))$) è continua in x_0



CONTINUITÀ E SUCCESSIONI

$f: A \to Y \qquad A \subset X \qquad x_0 \in A$

Teorema Sono equivalenti le due seguenti affermazioni

(a) f continua in x_0

(b) Per ogni successione (x_n) di punti di A $\left(x_n \in A \ \forall n \,!\right)$ tale che $x_n \xrightarrow{X} x_0$ SI HA $f(x_n) \xrightarrow{Y} f(x_0)$

$(\|x_n - x_0\| \to 0) \qquad \left(\| f(x_n) - f(x_0) \|_1 \to 0 \right)$

PROP Se $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ (X e Y devono avere dimensione finita!)

Allora L è continua

Dim. So che L è "rappresentata" da una matrice A:

Fissata una base $(e_1 \dots e_N)$ in $\mathbb{R}^N$ e una base $(e'_1 \dots e'_M)$ in $\mathbb{R}^M$ posso definire A come la matrice

$$A = \left(A^1 \middle| \dots \middle| A^N \right) \qquad \text{dove}$$

$$A^i = (L\, e_i) \leftarrow \text{in coordinate } e'_1 \dots e'_M$$

cioè A^i è un vettore (colonna) di $\mathbb{R}^M$ tale che

se $A^i = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} \iff L e_i = a_1 e'_1 + \dots + a_M e'_M$

Se A è fatta così si ha che

$$\forall v \in \mathbb{R}^N$$

$$\underbrace{[L v]_{(e'_1 \dots e'_M)}}_{\text{coordinate di } Lv \text{ in } \{e'_1 \dots e'_M\}} = A [v]_{(e_1 \dots e_N)}$$

Dalle quest sappiamo che $\|A\| < +\infty$ dove

$\|A\| =$ minima costante C per cui $\|Ax\| \leq C \|x\|$

$\Rightarrow$ L è continua in ZERO $\Leftarrow$ $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$

(se voglio che $\|Ax\| < \varepsilon$ posso prendere $\|x\| < \frac{\varepsilon}{\|A\|} =: r$)

DOPO DI CHE, se v_0 è un generico vettore di $\mathbb{R}^N$

$$\|Lv - Lv_0\|_1 = \|L(v-v_0)\|_1 \leq \|L\| \, \|v-v_0\|_1$$

e faccio come nel caso $v_0 = 0$

<u>OSS.</u> Se prendo $L : X \to Y$ lineare (non $\mathbb{R}^N / \mathbb{R}^M$) si vede che

L continua $\iff \exists \, c \in \mathbb{R}$ tale che $\|Lx\| \leq c\|x\| \quad \forall x$

<u>OSS.</u> Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ f continua su $\mathbb{R}^N$

Allora per ogni aperto $W \subset \mathbb{R}^M$ / per ogni chiuso $F \subset \mathbb{R}^M$

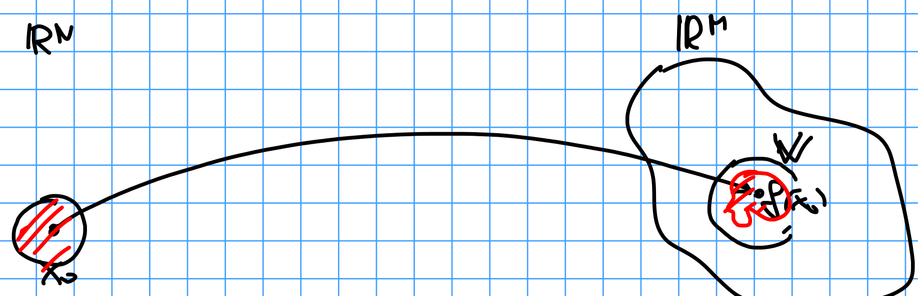
si ha che $f^{-1}(W)$ è aperto / $f^{-1}(F)$ è chiuso

(RICORDO CHE se $E \subset \mathbb{R}^M$ è un insieme $f^{-1}(E) = \{x : f(x) \in E\}$

<u>Dim.</u> Dimostro il caso dell'aperto:

$x_0 \in f^{-1}(W) \iff f(x_0) \in W$

Dato che W è aperto posso trovare $\varepsilon > 0$ per cui $B(f(x_0), \varepsilon) \subset W$



Dato che f è continua in x_0 $\exists \, r$: per ogni $x \in B(x_0, r)$ si ha

$$f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \subset W$$

Ho TROVATO $r > 0$: $\forall x \in B(x_0, r) \Rightarrow x \in f^{-1}(W)$

DUNQUE $f^{-1}(W)$ è aperto.

L'altra proprietà si fa in modo simile (posso anche passare ai complementari)

CONSEGUENZA Se $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ allora

- $\{f(x) \leq c\}$, $\{f(x) \geq c\}$, $\{f(x) = c\}$ sono chiusi perché sono le "controimmagini" di $]-\infty, c]$, $[c, +\infty[$, $\{c\}$ che sono chiusi in $\mathbb{R}$

- $\{f(x) < c\}$ e $\{f(x) > c\}$ sono aperti (controimmagini di $]-\infty, c[$ / $]c, +\infty[$)

($\partial \{f \leq c\}$??)