Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 09   11/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Fatto Delle norme p solo quella con $p=2$ (la norma euclidea standard) proviene da un prodotto scalare

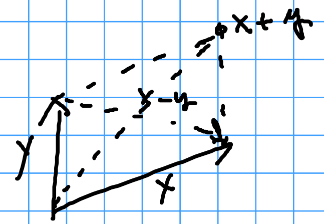
In fatti se vale $\|x\|^2 = x \cdot x \Rightarrow$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =$$

$$\|x\|^2 + 2x\cdot y + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2x\cdot y + \|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$\text{(PAR)} \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(eguaglianza di parallelogrammo:



Se guardo le norme p: $\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_N|^p\right)^{1/p}$;

mettiamoci in $N=2 \Rightarrow \|(x,y)\|_p = \left(x^p + y^p\right)^{1/p}$

Proviamo a vedere se vale (PAR) con $(0,1)$ e $(1,0)$

$(0,1)+(1,0) = (1,1)$ $(0,1)-(1,0) = (-1,1)$

Se valesse (PAR) avrei:

$$\|(1,1)\|_p^2 + \|(-1,1)\|_p^2 = 2\|(1,0)\|_p^2 + 2\|(0,1)\|_p^2$$

Facciamo i conti:

$$(1^p+1^p)^{2/p} + (1^p+1^p)^{2/p} = 2(1^p+0^p)^{2/p} + 2(0^p+1^p)^{2/p}$$

$$2^{2/p} + 2^{2/p} \qquad\qquad 2 \quad + \quad 2 \quad = 4$$

DOVREBBE ESSERE $\quad 2\,2^{2/p} = 4 \iff 2^{2/p} = 2$

$$\frac{2}{p} = 1 \iff p=2$$

SERIE $\quad X$ spazio vettoriale con una norma $\|\ \|$.

DEF. Sia $(x_n)_{n\geq n_0}$ una successione in X.
Posso allora definire la succ. $S_m := x_{n_0} + \dots + x_n$

$$S_m := \sum_{i=n_0}^{n} x_i$$

Diremo che (x_n) è SOMMABILE se S_m ammette limite in X, chiamiamolo S; cioè

$$\exists\, S \in X : \quad S_n \to S$$

Se ciò avviene dico anche che "la serie degli x_n è convergente" e indico $\sum_{m=n_0}^{\infty} x_m = S$, che si chiama "SOMMA" degli x_n / della serie degli x_n

Di solito si conviene che "la serie degli x_n" sia la successione (S_n) delle somme parziali. Si usa anche indicare la serie con lo stesso simbolo $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$

(la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge e $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}}$ $\frac{1}{2^n} = 2$

è il limite di $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}\right)_{n\geq 0}$)

$\left(\frac{1}{n-5}\right)_{n\geq 6}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-5} = 0$

OSS. Se $X = \mathbb{R}$ abbiamo "una cosa in più":

ci sono le serie divergenti a $+\infty$ / $-\infty$

quando $\sum_{i=n_0}^{n} a_i \to +\infty$ / $-\infty$

SE POI $a_n \geq 0$ sono sicuro che la serie degli a_n

o converge o diverge a $+\infty$ (se $a_n \geq 0 \Rightarrow S_{n+1} \geq S_n \Rightarrow$ S_n ha limite, eventualmente $+\infty$)

CONVENIAMO CHE, se $\underline{a_n \geq 0}$, posso sempre scrivere

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \in [0, +\infty]$$

DUNQUE, IN QUESTO CASO, dire che la serie

degli a_n converge EQUIVALE A DIRE $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < +\infty$

SOLO nel caso di $a_n \geq 0$

FATTO. Se $X = \mathbb{R}^N$ SONO EQUIVALENTI/

(a) "$\sum_{n=n_0}^{\infty} X_n$ converge"

(b) "$\sum_{n=0}^{\infty} X_{n,i}$ converge" dove $X_{n,i}$ = componente i-esima di X_n, $i = 1 .. N$

INOLTRE $\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n\right)_i = \sum_{n=n_0}^{\infty} x_{n,i}$

(VERIFICA SEMPLICE - NON LA FACCIAMO)

CONVERGENZA E CONVERGENZA ASSOLUTA

Def. Data (x_n) in X dico che la serie degli x_n

CONVERGE ASSOLUTAMENTE IN X (con norma $\| \ \|$)

se $\sum_{n=n_0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$

NUMERI ≥ 0

SI SA DA A1 che, se $x_n \in \mathbb{R}$ allora

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n| < +\infty \Rightarrow \text{"} \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \text{ CONVERGE"}$$

TEOR. Se $X = \mathbb{R}^N$ ogni serie assolutamente convergente è convergente.

Dim. (x_n) succ. in $\mathbb{R}^N$. È chiaro che:

$$|x_i| \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

DUNQUE se $\sum_{n=n_0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_{n,i}| < +\infty$ $\quad i = 1, 2, \ldots, N$

$\Rightarrow$ per Analisi 1 ogni $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_{n,i}$ converge a un x_i

$$\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n \to (x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

VEDIAMO SE C'È UN CONTESTO PIÙ AMPIO IN CUI VALE $\sum_{n=n_0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty \Rightarrow (x_n)$ SOMMABILE IN X

È VERO SE X è completo

Def. Data (x_n) succ. in X dico che (x_n) è di Cauchy se vale:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ n, m \geq \bar{n} \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

(quando n, m sono "grandi" x_n e x_m sono "vicini")

Si vede facilmente che

(x_n) ammette limite in X $\Rightarrow$ (x_n) è di Cauchy

La proprietà $\Leftarrow$ non è sempre vera. Per es. $X = \mathbb{Q}$ con $\|x\| = |x|$. C'è una succ. (q_n) che vista in $\mathbb{R}$ tende a $\sqrt{2}$ (e dunque è di Cauchy), ma che in $\mathbb{Q}$ non ha limite

Def. X (con la sua norma $\|\ \|$) si dice COMPLETO se ogni successione di Cauchy ammette limite in X

OSS. se metto una norma equivalente la completezza non cambia

FATTO $\mathbb{R}$ è completo, $\mathbb{R}^N$ è completo, $M(M,N)$ è complet.

TEOREMA Se X è completo, vale la proprietà "ASSOLUTAMENTE conv." $\Rightarrow$ "CONVERGENTE" (per le serie) (10è

(P) $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \|x_n\| < +\infty \Rightarrow (x_n)$ SOMMABILE IN X

Dim. ABBIAMO $(\bar{x}_n)$ succ. in X. Indichiamo

$$\sigma_n = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \qquad (\in \mathbb{R}^+)$$

$$S_n = x_1 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (\in X)$$

DIMOSTRIAMO (P) $(n_0 = 1 ..)$

$\sigma = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty \Leftrightarrow \sigma_n$ hanno limite $\sigma \Rightarrow$

(σ_n) è di Cauchy in $\mathbb{R}$. NOTIAMO CHE

dati $n \geq m \in \mathbb{R}$

$$\| S_n - S_m \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \right\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \leq$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} \| x_i \| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \sum_{i=1}^{m} \|x_i\| = |\sigma_n - \sigma_m|$$

QUESTA DISUGUAGLIANZA IMPLICA CHE (S_n) è di Cauchy dato che (σ_n) è di Cauchy.

Dato che X è completo S_n HA LIMITE

cioè la serie degli (x_n) è sommabile $\not{D}$

ALTRO ESEMPIO CON LE MATRICI

Sia A una matrice $N \times N$ (QUADRATA)

Dunque ha senso fare $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \quad A}_{n \text{ volte}}$; $A^0 = I$

Ieri abbiamo visto che, se $\|A\| < 1 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ converge alla matrice $(I - A)^{-1}$

(dunque se $\|A\| < 1$ $\quad \det(I - A) \neq 0$)

Consideriamo "la matrice esponenziale" e^A definita da

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \qquad \left(\text{ricordiamo che } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \forall x \in \mathbb{R} \right)$$

Vediamo che la serie è assolutamente convergente (nella norma delle matrici). Infatti: - come ieri - uso la disuguaglianza $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ $\left(\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\| \right)$

DUNQUE $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = e^{\|A\|} < +\infty$

DUNQUE e^A è una matrice ben definita

Se $A=0$ $\quad e^A = I$

Si dimostra che $\quad e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ se $A \cdot B = BA$ (A e B commutano)

da precisare – la vedremo

Vedremo, per esempio, che

se $A(t) = e^{tA}$ allora $A'(t) = A\, e^{tA} = A\, A(t)$

"formalmente"

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{1}{n}t^n A^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\, n t^{n-1} A^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n = A\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!}}_{\text{cambio di indice}} = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n A^n}{n!} =$$

$A\, e^{tA}$

cambio di indice n al posto di $n-1$

$m = n-1 \quad \rightsquigarrow A\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m A^m}{m!}$

Nel caso scalare ho la ben nota formula $\frac{d}{dt}e^{ta} = a\, e^{tA}$

SOTTOSUCCESSIONI e c.

X vettoriale con una norma $\| \ \|$

Def. Data una succ. (x_n) dico che (y_n) è una sottosuccessione di/ un'estratta da (x_n) se esiste una $\sigma_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che

$$y_n = x_{\sigma_n}$$

(potrebbe essere $\sigma_n : \{n \geq n_0\} \to \{n \geq n_0\}$)

la (σ_n) è una "selezione di indici" della (x_n)

PER ESEMPIO $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ è un'estratta da $\left(\frac{1}{n}\right)$

Basta prendere $\sigma_n = n^2$ $\qquad 1 \ \ \frac{1}{2} \ \ \frac{1}{3} \ \ \frac{1}{4} \ \ \frac{1}{5} \ \ \frac{1}{6} \ \ \frac{1}{7} \ \ \frac{1}{8} \ \ \frac{1}{9} \ \ \frac{1}{10}$

OSS. Se $\sigma_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strett. crescente $\Rightarrow \sigma_n \geq n \; (\Rightarrow \sigma_n \to +\infty)$

$\sigma_0 \geq 0 \qquad \sigma_1 > \sigma_0 \Rightarrow \sigma_1 \geq \sigma_0 + 1 \geq 1$

$\sigma_2 > \sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 \geq \sigma_1 + 1 \geq 2$ e così via...

PROP. • Se (y_n) è estratta da (x_n) e se $x_n \to \ell \Rightarrow y_n \to \ell$

(teorema di composizione di limiti)

• IL CONTRARIO E' FALSO IN GENERE. PERÒ

(• Se ogni (y_n) estratta da (x_n) ha limite ℓ

$\Rightarrow x_n \to \ell$ OVVIO PERCHÉ (x_n) è anche lei un'estratta)

TEOREMA (BOLZANO) Se $X = \mathbb{R}^N$ ogni successione LIMITATA ammette un'estratta convergente

SO CHE è VERO se $N = 1$ (Proprietà IMPORTANTE DI $\mathbb{R}$)

Idea di dim. nel caso N.

Vediamo il caso $N = 2$. HO UNA SUCC. $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$

LIMITATA. Ne segue che (x_n) e (y_n) sono entrambe limitate $(|x_n| \leq \|(x_n, y_n)\|, \; |y_n| \leq \|(x_n, y_n)\|)$

Per il caso $N = 1$ (x_n) ammette un'estratta x'_n che ha limite x (cioè $\exists \sigma_n : x'_n = x_{\sigma_n} \to x$)

Consideriamo $y'_n = y_{\sigma_n}$. Chiaramente (y'_n) è limitata

Posso trovare un'estratta (y''_n) di (y'_n) convergente a y

(cioè $\exists \sigma'_n$ tale che $y''_n = y'_{\sigma'_n} \to y$)

chiamo $x''_n = x'_{\sigma'_n}$. (x''_n) è estratta da $(x'_n) \Rightarrow$

$x''_n \to x$. IN DEFINITIVA $(x''_n, y''_n) \to (x, y)$

⊗ è una sottosuccessione di $((x_n, y_n))$

Se $N = 3$ segue lo stesso ragionamento prendendo una ulteriore sottosuccessione per far convergere le z_n

NEL CASO N SI RAGIONA PER INDUZIONE

Def. $A \subset X$ si dice COMPATTO se ogni successione (x_n) in A ammette una sottosuccessione (x'_n) che converge a un $x \in A$

PROP.

Se $A \subset X$ è compatto $\Rightarrow$ A è limitato e chiuso

TEOREMA Se $X = \mathbb{R}^N$ allora

A limitato e chiuso $\Leftrightarrow$ A compatto