Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 08   10/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Norme equivalenti. La norma che avevamo considerato è $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ (dove $x = (x_1, \dots, x_N)$)

Posso vedere la norma come caso speciale di una def. più generale:

<u>Def.</u> Dato $p \geq 1$ definisco la "norma p"

$$\|x\|_p = \left((x_1)^p + \dots + (x_N)^p \right)^{1/p}$$

Con questa definizione la norma solita è $\| \ \|_2$ (norma euclidea)

Ci sarebbe da verificare che $\|\cdot\|_p$ è effettivamente una norma, — IN PART. la dis. triangolare,

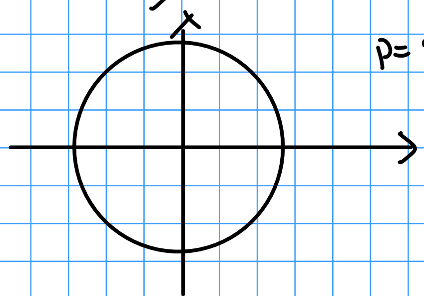
Per esempio nel caso $p = 1$ è facile vedere che è una norma

$$\|x+y\|_1 = |x_1+y_1| + \dots + |x_N+y_N| \leq |x_1| + |y_1| + \dots + |x_N| + |y_N| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

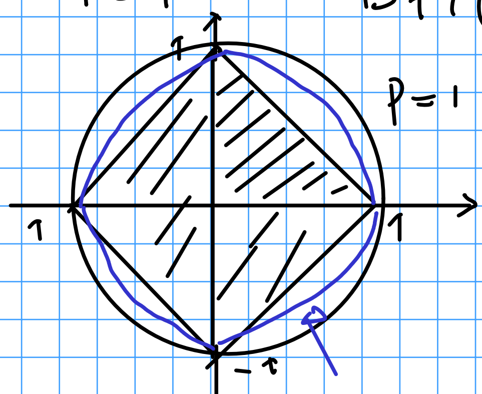
FIDIAMOCI DEL FATTO CHE $\| \cdot \|_p$ è una norma $\forall p \geq 1$.

Vediamo come sono fatti i "DISCHI" al variare di p $(N=2)$

$x_0 = (0,0)$



$p = 1$ $\quad B_1((0,0), 1) = \{(x,y) : |x| + |y| < 1\}$



se mi metto in $\{x \geq 0, y \geq 0\}$

trovo $x + y < 1$

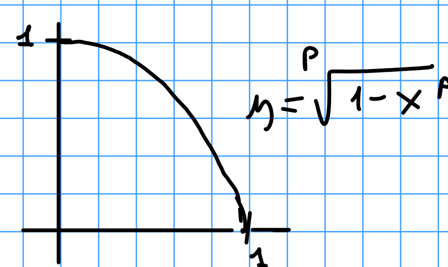
Il resto si ottiene per simmetria

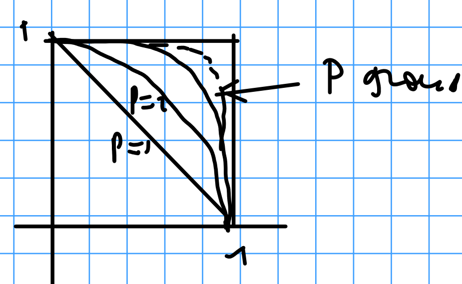
$1 < p < 2$ si vede dal disegno che $B_1(0,1) \subset B_2(0,1)$

· In generale se cerco di disegnare $B_p(0,1)$

- mi metto su $x \geq 0$ $y \geq 0$ trovo l'equazione

$$x^p + y^p < 1$$
$$y < \sqrt[p]{1 - x^p}$$





Più p cresce più B_p tende a essere il quadrato $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

Infatti si può vedere che se fisso $x \in \mathbb{R}^N$

$$\|x\|_p \xrightarrow{p \to \infty} \max\{|x_1|, \dots |x_N|\}$$

Verifichiamolo: Sia $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$

sia i la coordinata per cui $\boxed{|x_i| = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|\}}$

Allora, $\forall p$: $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_N|^p} \le \sqrt[p]{\underbrace{|x_i|^p + \dots + |x_i|^p}_{N \text{ addendi}}} = \sqrt[p]{N}\, |x_i|$

$$\|x\|_p \ge \sqrt[p]{|x_i|^p} = |x_i|$$

Ho trovato

$$|x_i| \le \|x\|_p \le \sqrt[p]{N}\, |x_i|$$

Se faccio tendere $p \to +\infty$ ho $\sqrt[p]{N} \to 1$

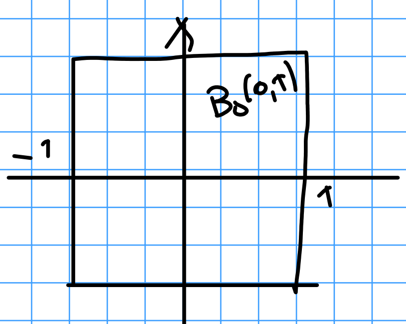
Dunque $\|x\|_p \longrightarrow |x_i| = \max(|x_1| \dots |x_N|)$

<u>CHIAMO</u> $\|x\|_\infty = \max(|x_1| \dots |x_N|)$

Si vede facilmente vale la dis. triangolare $\|x+y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ e dunque anche $\| \ \|_\infty$ è una norma.

Torno in $\mathbb{R}^2$

$$B_\infty(0,1) = \{(x,y) : \max(|x|,|y|) < 1\} \Leftrightarrow$$
$$\{(x,y) : |x| < 1 \text{ e } |y| < 1\}$$



DIMOSTRIAMO CHE TUTTE QUESTE NORME SONO TRA LORO EQUIVALENTI

Prendo $1 \le p < +\infty$. Sia $x \in \mathbb{R}^N$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots |x_N|^p} \le \underbrace{\sqrt[p]{N}}_{\text{è una costante}} \|x\|_\infty$$

è una costante
(che dipende dalla dimensione dello spazio)

Viceversa, se x_i è la "massima coordinata"

$$\|x\|_\infty = |x_i| = \sqrt[p]{|x_i|^p} \leq \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_N|^p} = \|x\|_p$$

DUNQUE $\boxed{\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{N}\, \|x\|_\infty}$

per cui $\| \ \|_\infty$ è equivalente a ogni $\| \ \|_p$

Ne segue facilmente che, dati p_1 e $p_2 \in [1, +\infty[$

$$\|x\|_{p_1} \leq \sqrt[p_1]{N}\, \|x\|_\infty \leq \sqrt[p_1]{N}\, \|x\|_{p_2}$$

e vale anche (scambio p_1 e p_2)

$$\|x\|_{p_2} \leq \dots \leq \sqrt[p_2]{N}\, \|x\|_{p_1}$$

$\| \ \|_{p_1}$ e $\| \ \|_{p_2}$ sono equivalenti

DANNO TUTTE LA STESSA NOZIONE DI LIMITE

ESEMPIO (BANALE)

Se $f(x) \xrightarrow{\| \ \|} 0 \Rightarrow f(x) \xrightarrow{\| \ \|_\infty} 0 \Rightarrow$ ogni coordinata $f_i(x) \to 0$

Consideriamo $X = \mathcal{M}(M, N) = \{A : A$ è una matrice $M \times N\}$

$M \times N \leftarrow$ M righe e N colonne

$A = \{a_{ij}\}$ $\quad i = 1 \dots M \quad j = 1, \dots, N$

A individua un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

È chiaro che X è uno spazio vettoriale.

Posso mettere varie norme su X. Per esempio posso identificare $\mathcal{M}(M, N)$ con $\mathbb{R}^{MN}$ (prodotto tra M e N) e definire

$$\|A\|_p = \sqrt[p]{\sum_{\substack{i=1 \dots M \\ j=1 \dots N}} |a_{ij}|^p} \qquad \|A\|_\infty = \max \{|a_{ij}|\}$$

Queste sono tutte norme equivalenti e permettono di definire una nozione di limite sulle matrici.

Con queste norme si ha (caso delle successioni)

$$A_n \xrightarrow{n\to\infty} A \iff a_{ij}^{(n)} \longrightarrow a_{ij} \quad \begin{array}{l} i=1..M \\ j=1..N \end{array}$$

(ho indicato con $a_{ij}^{(n)}$ le componenti di A_n e a_{ij} quelle di A)

per vederlo si può usare la norma ∞

$$A_n \to A \iff \|A_n - A\|_\infty \to 0 \iff \max_{ij} |a_{ij}^{(n)} - a_{ij}| \to 0$$
$$\iff a_{ij}^{(n)} \to a_{ij} \quad \forall i j$$

IN Realtà su X è definita la "norma matriciale":

$$\|A\| = \inf\{ c \geq 0 : \underbrace{\|Ax\|_{\mathbb{R}^M}}_{\text{NORME EUCLIDEE}} \leq c \underbrace{\|x\|_{\mathbb{R}^N}} \ \forall x \in \mathbb{R}^N \}$$

$$= \sup\{ \|Ax\|_{\mathbb{R}^M} : \|x\|_{\mathbb{R}^N} = 1 \} =$$
$$\sup\{ \|Ax\|_{\mathbb{R}^M} : x \in S_N \} \qquad (S_N = \{\|x\|_{\mathbb{R}^N} = 1\})$$

VEDIAMO CHE LE DUE DEFINIZIONI COINCIDONO!

IN EFFETTI DATO UN NUMERO $c \geq 0$ SI HA

$$(*) \quad \|Ax\| \leq c\|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^N \iff \|Ax\| \leq c \ \forall x \in S_N$$

"$\Rightarrow$" è ovvia

dimostro "$\Leftarrow$" Supponiamo che $\|Ax\| \leq c \ \forall x \in S$, sia $x \in \mathbb{R}^N$

$x \neq 0$ (se $x = 0$ è tutto vero) $\quad x = \frac{x}{\|x\|}\|x\| \Rightarrow$

$$\|Ax\| = \|A \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\in S}\| \|x\| \leq c\|x\|$$

HO DIMOSTRATO (*)

$$\inf \overbrace{\{c \geq 0 : \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^N\}}^{m} = \sup\{ \|Ax\| : x \in S_N \}$$

Da (*) segue che $c \in \mathcal{M} \iff c$ è un maggiorante per $\|Ax\|$ $\Rightarrow$ $\inf \mathcal{M} =$ inf dei maggioranti di $\|Ax\|$

$= \sup \{\|Ax\| : x \in S_N\}$

VEDIAMO CHE $\| \ \|$ è una norma su $X = \mathcal{M}(M,N)$

<u>Dim.</u> (a) (b) sono facili. Vediamo (c) = dis. triangolare.

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$$

Sia $c_1 > \|A\|$ e $c_2 > \|B\|$. Allora

$$\|Ax\| \le c_1 \|x\| \quad e \quad \|Bx\| \le c_2 \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

(def. di norma e proprietà dell'inf)

MA ALLORA

dis triang. su $\mathbb{R}^M$

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le c_1\|x\| + c_2\|x\| = (c_1+c_2)\|x\|$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|A+B\| \le c_1 + c_2 \qquad \forall c_1 > \|A\|, \ \forall c_2 > \|B\|}$$

$$\Downarrow$$

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$$

La norma "matriciale" è una norma

<u>OSS.</u> Se $N = M \Rightarrow$ in $X = \mathcal{M}(N,N)$ è definito il prodotto tra matrici: $X \times X \to X$

Allora $\|A \cdot B\| \le \|A\| \, \|B\|$ (in realtà non occorre che siano quadrate — basta che si possa fare il prodotto)

PIÙ IN GENERALE BASTA CHE A sia $\underbrace{M \times N}_{(\text{da } \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M)}$ e B sia $\underbrace{N \times K}_{(\text{da } \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N)}$

$\Rightarrow$ $A \cdot B$ è $M \times K$ $(\text{da } \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^M)$

A sia 3×2 B 2×4

$$\begin{bmatrix} - \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \end{bmatrix}$$

Dimostriamo la formula $\|A\, B\| \le \|A\|\,\|B\|$

In effetti dato $x \in \mathbb{R}^K$ ho

$$\|ABx\|_{\mathbb{R}^M} = \|A(Bx)\|_{\mathbb{R}^M} \le \|A\|\,\|Bx\|_{\mathbb{R}^N} \le \underbrace{\|A\|\,\|B\|}_{C}\,\|x\|_{\mathbb{R}^K}$$

$$\Rightarrow \|A\,B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$$

FATTO $\|\ \|$ è equivalente alla $\|\ \|_p$ $(\forall p)$

DIM. Ricordo che se ho due matrici A e B

A e $M \times N$ e B è $N \times K$ allora l'elemento

$i \in 1..M$
$j = 1..K$

C_{ij} di $A\,B$ è il prodotto $(C = AB)$

$A_i\, B^j$ dove A_i = riga i-esima di A
B^j = colonna j-esima di B

$\parallel$

$(A_i)^t \cdot B^j$ (VEDO I VETTORI COME COLONNE)

$$A = \begin{bmatrix} \overbrace{\quad A_1 \quad}^{N} \\ \hline \\ \hline A_M \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B^1 \,\Big|\, & \Big|\, B^K \end{bmatrix} \Big\} N$$

Prendiamo un vettore $x \in \mathbb{R}^N$ $Ax \in \mathbb{R}^M$

$\underline{i = 1..N}$ $(Ax)_i = (A^i)^t \cdot x$ $(B = x$ è $N \times 1)$

$$\Rightarrow \quad |(Ax)_i| \leq \|A^i\|_2 \|x\|_2$$

$\in \mathbb{R}^N$

(Schwartz vale con la norma euclidea)

(uso $p=2$ nella dis. tra le varie norme)

$$\leq \sqrt[2]{N} \|A^i\|_\infty \|x\|_2 \leq \sqrt[2]{N} \|A\|_\infty \|x\|_2$$

$$(\|\ \|_\infty = \max |a_{ij}|)$$

Ho trovato

$$|(Ax)_i| \leq \sqrt{N} \|A\|_\infty \|x\|_2 \quad \forall\ i = 1 \dots M$$

$$\Rightarrow \quad \|Ax\|_\infty \leq \sqrt{N} \|A\|_\infty \|x\|_2$$

$$\|Ax\|_\infty \geq \|Ax\|_2$$

(vedi sempre la dis. tra le norme p e norma ∞ — $p=2$)

cioè $\quad \|Ax\|_2 \leq \sqrt{N} \|A\|_\infty \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Per la definizione della norma matriciale ho ottenuto

$$\|A\| \leq \sqrt{N} \|A\|_\infty$$

VEDIAMO CHE VALE ANCHE UNA DISUG. A SINISTRA.

$(\|A\| \geq \text{cost.} \|A\|_\infty\ ??)$

Data A prendiamo gli indici (i,j) per cui

$$|a_{ij}| = \max(\dots) = \|A\|_\infty$$

Si ha

$$a_{ij} = \underbrace{(A\hat{e}_j)}_{j\text{-esima colonna di } A} \cdot \hat{e}'_i$$

$\hat{e}_j$ = versori di $\mathbb{R}^N$

$\hat{e}'_i$ = versori di $\mathbb{R}^M$

$$\Rightarrow \quad |a_{ij}| \le \|A\hat{e}_j\| \, \underbrace{\|\hat{e}_i\|}_{1} \quad \text{(Schwartz)}$$

$$= \|A\hat{e}_j\| \le \|A\| \, \underbrace{\|\hat{e}_j\|}_{=1} = \|A\|$$

HO TROVATO CHE $\|A\|_\infty \le \|A\|$

DUNQUE $\|A\|$ e $\|A\|_\infty$ sono equivalenti !!

ESEMPIO Si dimostri il seguente fatto:

Se A è una matrice $\boxed{N\times N}$ con $\|A\| < 1 \Rightarrow$

$I - A$ è invertibile e $\boxed{(I-A)^{-1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} A^n}_{??}} \leftarrow (\star)$

$A^0 = I$
A^n = $\underbrace{A \cdots A}_{n \text{ VOLTE}}$

LA NOZIONE DI SERIE SI DEDUCE DA QUELLA DI LIMITE

Se (A_n) è una succ. di matrici dico che la serie

$\sum A_n$ converge se la successione (delle somme parziali)

$S_m = \sum_{i=0}^{m} A_i$ ammette limite S

Se ciò avviene scrivo $S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$

$(\star)$ va intesa con $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} A^i$

Il fatto che la serie $(\star)$ converge dipende da

un criterio di "CONVERGENZA ASSOLUTA" (su cui torniamo)

SE $\sum \|A_n\| < +\infty \Rightarrow \sum A_n$ CONVERGE

(FIDIAMOCI PER ORA)

Verifichiamo che il criterio funziona nel nostro caso in cui $A_n = A^n$. Infatti:

$(\|A\|<1 \ !!)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n}_{\text{serie geometrica}} = \frac{1}{1-\|A\|} < +\infty$$

$$\Rightarrow \quad \text{Esiste } S = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{m} A^i}_{S_m} \quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} A^n\right)$$

Facciamo

$$(I-A)S_m = (I-A)\sum_{i=0}^{m} A^i = \sum_{i=0}^{n} A^i - \sum_{i=0}^{n} A^{i+1} =$$

$$A^0 - A^{n+1} = I - A^{n+1}$$

$$\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (\|A\|<1)$$

$$\Rightarrow \quad (I-A)S_m = I - A^{n+1} \longrightarrow I$$

$$\downarrow$$

$$(I-A)S$$

CIOE' S e' un'inversa destra per $I-A$

Stesso conto su $S_m(I-A)$ ... $\longrightarrow I$

S e' anche un'inversa sinistra e dunque

$I-A$ e' invertibile e $S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I-A)^{-1}$

HO GENERALIZZATO LA SERIE GEOM. $A \in \mathbb{R}$

$$|A|<1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A^n = \frac{1}{1-A}$$