Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 07   09/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

SUCCESSIONI

X spazio vettoriale. Chiamo SUCCESSIONE di punti di X / succ. in X una funzione $a : \mathbb{N} \to X$ ($\mathbb{N}$ = numeri interi). Per tradizione scriverò a_n invece di $a(n)$ / (a_n) $\{a_n\}$ invece di a

Spesso a_n non è definita per tutti gli . DOVREI dire che una succ. (a_n) è definita per n grande ($\exists n_0 : \quad a : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \to X$)

FATTO L'unico possibile limite per una succ. (a_n) è per $n \to +\infty$ (secondo la def. già vista) $a_n \to \ell \overset{\iff}{\text{def}}$

$$\forall \varepsilon \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \quad \|a_n - \ell\| < \varepsilon$$

Proprietà legate alle successioni. (SENZA DIM.)

- $A \subset \mathbb{R}^N$ è chiuso $\iff$ $\forall (a_n)$ successione che ha limite a e tale che $a_n \in A$ $\forall n$ si ha $a \in A$
(ogni successione di punti di A, se ha limite, tende a un punto)

- $x_0 \in \partial A \iff \exists$ due successioni (x'_n) e (x''_n) tali che $x'_n \in A$ $\forall n$, $x''_n \notin A$ $\forall n$
$x'_n \to x_0$ $x''_n \to x_0$

- x_0 è pto di accumulazione per $A \iff \exists (x_n)$ con $x_n \in A$ $\forall n$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$

dim. $\Rightarrow$ suppongo x_0 di acc. So che $\forall r>0$
$\exists \underset{x_r}{x} \in B(x_0,r) \cap A \setminus \{x_0\}$. Prendo $r = 1/n$ e chiamo x_n il punto della sopra - in corrispondenza di $r = 1/n$
Si vede che: Dato $\varepsilon > 0$ prendo $\bar{n}$ con $\bar{n} > 1/\varepsilon$
se $n \geq \bar{n}$ $\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon$
Ho dimostrato che $x_n \to x_0$
Viceversa supponiamo che esista (x_n) come sopra, mostriamo che x_0 è di acc. Prendo $r>0$. Se $x_n \to x_0$, allora
$\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ $x_n \in B(x_0,r)$ Dunque
ho trovato $x_{\bar{n}} \in B(x_0,r) \cap A \setminus \{x_0\}$. #

LIMITE DI FUNZIONI $\leftrightarrow$ LIMITE TRAMITE SUCCESSIONI

<u>Teorema</u> Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^N$ $x_0 \in \mathbb{R}^N$ di accumulazione per A; $f: A \to \mathbb{R}^M$ $l \in \mathbb{R}^M$.
SONO EQUIVALENTI:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

existono successioni con queste proprietà perché x_0 è di acc. per A

(b) $\forall (x_n)$ successione in $A \setminus \{x_0\}$, con $x_n \to x_0$

si ha $f(x_n) \to \ell$

Dim. (a) $\Rightarrow$ (b) è il Teorema di composizione dei limiti

(è facile verificare le ipotesi)

(b) $\Rightarrow$ (a) Si ragiona per assurdo.

Supponiamo che non sia vero che $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

NON $\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 : \forall x \in B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} \text{ si ha } f(x) \in B(\ell, \varepsilon) \right)$

cioè $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall r > 0 \ \exists x \in B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\}$ con $\|f(x) - \ell\| \geq \varepsilon_0$

Dato $n \in \mathbb{N}$ prendo $r = 1/n$ e chiamo x_n il punto

corrispondente ad r, cioè

$\forall n$ ho $\underbrace{x_n \in B(x_0, 1/n) \cap A \setminus \{x_0\}}$ t.c. $\|f(x_n) - \ell\| \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow x_n \to x_0, \ x_n \in A, \ x_n \neq x_0$

però $\|f(x_n) - \ell\| \geq \varepsilon_0$. Per (b) dovrei avere

$f(x_n) \to \ell$. Allora dovrei trovare $\bar{n}$ (corrispondente a ε_0) : $\forall n \geq \bar{n}$

$\|f(x_n) - \ell\| < \varepsilon_0$ IN CONTRADDIZIONE

DUNQUE se vale (b) $\Rightarrow$ $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$ #

Se X spazio vettoriale con una norma $\|\cdot\|$

$\longrightarrow$ è definita la nozione di limite (con tutte le proprietà dette)

SE considero un'altra norma su X la nozione di limite può cambiare.

Def. (NORME EQUIVALENTI) Supponiamo di avere due norme $\| \ \|$ e $\| \ \|_1$ su X. Dico che sono EQUIVALENTI se esistono $c_2 > c_1 > 0$ tali che

$$c_1 \|x\|_1 \leq \underbrace{\|x\| \leq c_2 \|x\|_1} \qquad \forall x \in X$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{c_2} \|x\| \leq \underbrace{\|x\|_1 \leq \frac{1}{c_1} \|x\|}$$

OSS. Se $\| \ \|$ e $\| \ \|_1$ sono equivalenti $\Rightarrow \forall r > 0$ $\forall x_0 \in X$ abbiamo le seguenti inclusioni:

$$B_1(x_0, r/c_2) \subset \underset{\text{fatta con } \| \ \|}{B(x_0, r)} \subset \underset{\text{fatta con } \| \ \|_1}{B_1(x_0, r/c_1)}$$

DA CUI SEGUE che i limiti fatti con $\| \ \|$ coincidono con i limiti fatti con $\| \ \|_1$. CIOÈ

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell \ (\text{in NORMA } \| \ \|) \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell \ (\text{in norma } \| \ \|_1)$$