Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 06   04/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

PROPRIETÀ DEI LIMITI ∞ (sottintendo $x \to x_0$)

- $+\infty + (+\infty) = +\infty$ / $-\infty + (-\infty) = -\infty$

(se $f \to +\infty$, $g \to +\infty \Rightarrow f+g \to +\infty$ – lo stesso per le altre)

- $\ell > 0 \Rightarrow \ell \cdot (+\infty) = +\infty$, $\ell \cdot (-\infty) = -\infty$ (l anche $+\infty$)
  $\ell < 0 \Rightarrow \ell \cdot (+\infty) = -\infty$, $\ell \cdot (-\infty) = +\infty$

- $\frac{1}{0^+} = +\infty$ $\frac{1}{0^-} = -\infty$

$(f \to \ell^-)$

Qui uso la convenzione che $f \to \ell^+$ se $f \to \ell$ e $f > \ell$ $(f < \ell)$ in un intorno di x_0

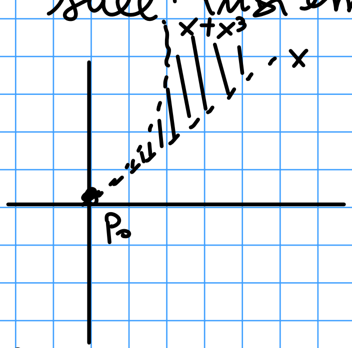
- $\frac{1}{+\infty} = 0^+$ $\frac{1}{-\infty} = 0^-$ $\left(\frac{1}{0} \text{ non è detto che abbia limite} \right)$

- Se $f(x) \geq g(x)$ allora
  $g(x) \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
  $f(x) \to -\infty \Rightarrow g(x) \to -\infty$

ALTRO ESEMPIO

Stessa espressione di prima $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{y-x}$

sull'insieme $A = \{(x,y) : x > 0, \ x < y < x + x^3\}$



$P_0 = (0,0)$

P_0 è di acc. per A. Se $r>0$ prendo $P_r = (r, r + r^3/2)$

Si vede che $P_r \in A$ e P_r lo posso prendere vicino quanto voglio a P_0 pur di prendere $r>0$ piccolo

$(\|P_r - P_0\| = \|P_r\| = \sqrt{r^2 + (r + r^3/2)^2} = r\sqrt{1 + (1 + r^2/2)^2}$

$\to 0^+$ x $r \to 0$

Dico che $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = +\infty$

Infatti se $(x,y) \in A$

$$0 < y - x \leq x + x^3 - x = x^3$$
$$2x + x^3 \geq x + y \geq 2x$$
$\Rightarrow$ $(x > 0)$

$$f(x,y) \geq \frac{(2x)^2}{x^3} = \frac{4}{x}$$

So che $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} x = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} \dfrac{4}{x} = +\infty$

DUNQUE, per il confronto, anche $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = +\infty$

ESEMPIO (TEORICO - DA RICORDARE)

Sia A matrice $N \times N$ SIMMETRICA

So dal "teorema spettrale" che $\exists$ M invertibile, con $M^{-1} = M^t$, esisto $\lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{R}$ (non necessariamente distinti) T.C.

$$A = M D M^{-1}$$

e $$D = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Ne segue che λ_i sono autovalori di A e $\boxed{e_i = M \hat{e}_i}$ ($\hat{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ posto i) sono corrispondenti autovettori

INFATTI

$$A e_i = (M D \cancel{M^t}) \cancel{M} \hat{e}_i = M D \hat{e}_i \quad M(\lambda_i \hat{e}_i) = \lambda_i M \hat{e}_i = \lambda_i e_i$$

D ha autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_N$
ha autovettori $\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

cerco gli autovalori come radici del pol. caratteristico

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 3$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Cerco gli autovettori. $\lambda = \lambda_1$ mi serve $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tale che

$$A e_1 = \lambda_1 e_1 \iff \begin{cases} x + y = (5+\sqrt{13})x/2 \\ x + 4y = (5+\sqrt{13})y/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-5-\sqrt{13})x+2y=0 \\ 2x+(4-5-\sqrt{13})y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -(3+\sqrt{13})x+2y=0 \\ 2x-(1+\sqrt{13})y=0 \end{cases}$$

so che il sistema ha "una retta" di sol: DALLA I° riga:

$$y=\frac{(3+\sqrt{13})x}{2}$$

un possibile $\tilde{e}_1=\begin{pmatrix}2\\3+\sqrt{13}\end{pmatrix}$ NORMALIZZO $e_1=\frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{26+6\sqrt{13}}}\tilde{e}_1$

$$\|\tilde{e}_1\|^2=4+(3+\sqrt{13})^2=4+9+6\sqrt{13}+13=26+6\sqrt{13}$$

Dovrei rifare il calcolo per λ_2 – Però so che gli autovettori sono ortogonali: posso prendere (siamo in $\mathbb{R}^2$)

$$e_2=\begin{pmatrix}3+\sqrt{13}\\-2\end{pmatrix}$$

Prendiamo $M=[e_1|e_2]=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{26+6\sqrt{13}}} & \frac{3+\sqrt{13}}{\sqrt{26+6\sqrt{13}}}\\ \frac{3+\sqrt{13}}{\sqrt{26+6\sqrt{13}}} & -\frac{2}{\sqrt{26+6\sqrt{13}}}\end{bmatrix}$

Si vede che $M^{-1}=M^t$ e che

$$A=M\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{bmatrix}M^{-1}$$

Posso dire che $e_1=M\hat{e}_1$

(N.B. $A\cdot\hat{e}_i$ = i-esima colonna di A)

DATA A considero la "forma quadratica"

$$\phi(x)=Ax\cdot x=x^tAx$$ (A VOLTE SI PRENDE $\frac{1}{2}Ax\cdot x$)

$$\Phi(x) = \sum_{i,j=1..N} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i>j=1..N} a_{ij} x_i x_j$$

per $x^2 + xy + y^2$ è associata alla matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

FATTO Sono equivalenti le seguenti affermazioni

(1) $\lambda_i > 0$ per $i = 1 \cdots N$

(2) $Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$

(3) $\lim_{\|x\| \to \infty} Ax \cdot x = +\infty$

(4) $\exists\, \nu > 0$ tale che $Ax \cdot x \geq \nu \|x\|^2$ corrisponde a $A = I$

Def. Dico che $A > 0$ (definito positivo) se vale una tra le 1 - - 4, Per es. (DEF. STANDARD)

$A > 0$ VUOL DIRE $Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$

Dimostriamo il FATTO.

$(1) \Rightarrow (4)$ Prendo $\nu := \min(\lambda_1 \cdots \lambda_N)$

Prendo $x \in \mathbb{R}^N$ e chiamo $\tilde{x} = M^{-1} x = M^t x$

$$Ax \cdot x = x^t A x = \underbrace{x^t M}_{\tilde{x}^t} D \underbrace{M^t x}_{\tilde{x}} = \tilde{x}^t D \tilde{x} =$$

$$\left(\text{se } \tilde{x} = (\tilde{x}_1 \cdots \tilde{x}_N) \right) = \sum \lambda_i \tilde{x}_i^2 = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \cdots \lambda_N \tilde{x}_N^2$$

$$\geq \nu (\tilde{x}_1^2 + \cdots + \tilde{x}_N^2) = \nu \|\tilde{x}\|$$

Ho TROVATO $Ax \cdot x \geq \nu \|\tilde{x}\|^2$

Dico che $\|\tilde{x}\|^2 = \|x\|^2$; infatti

$$\|\tilde{x}\|^2 = \tilde{x} \cdot \tilde{x} = \tilde{x}^t \tilde{x} = (M^t x)^t \cdot M^t x = x^t \cancel{M} \cancel{M^t} x$$

$$x^t x = x \cdot x = \|x\|^2$$

DUNQUE $\boxed{A \cdot x \geq \nu \|x\|^2}$ (ν = minimo autovalore)

(4) $\Rightarrow$ (3) dato che $Ax \cdot x \geqslant \nu \|x\|^2$

è chiaro che $\lim_{\|x\| \to \infty} Ax \cdot x = +\infty$

(4) $\Rightarrow$ (2) se $Ax \cdot x \geqslant \nu \|x\|^2 \Rightarrow Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0$

(2) $\Rightarrow$ (1) so che $Ax \cdot x > 0$. fisso i e prendo $x = e_i$ ($\neq 0$)

Allora $0 < Ae_i \cdot e_i = \lambda_i \|e_i\|^2 \Rightarrow \lambda_i > 0$

MI MANCA (3) $\Rightarrow$ (2)

So che $\lim_{\|x\| \to \infty} Ax\, x = +\infty$ (*)

Prendo $x \neq 0$ e considero $\|tx\| \to +\infty$ se $t \to +\infty$

Allora da (*) $\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} A(tx) \cdot (tx) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim_{t \to +\infty} t^2 (Ax \cdot x) = +\infty \Rightarrow Ax \cdot x > 0$

($(Ax \cdot x)\, t^2$ è una parabola in $\mathbb{R}$)

ANALOGAMENTE DEFINISCO

$A \geq 0 \qquad A < 0 \qquad A \leq 0$

$Ax \cdot x \geq 0 \ \forall x$, $Ax \cdot x < 0 \ \forall x \neq 0$, $Ax \cdot x \leq 0 \ \forall x$

$A \geq 0$ (A è semidefinito positivo) ($\lambda_i \geq 0$)

$A \leq 0$ (A " " " negativo) ($\lambda_i \leq 0$)

$A <$ (A è definito negativo) ($\lambda_i < 0$, $Axx \xrightarrow{\|x\| \to \infty} -\infty$)

A indefinito se ho tutti autovalori $\neq 0$, ma non con lo stesso segno

Per vedere se $A \geq 0 / \leq 0 / > 0 / < 0$ c'è un criterio (che non richiede il calcolo esplicito dei λ_i)

CRITERIO DI SYLVESTER

Prima mi servono delle definizioni.

A $N \times N$ simmetrica CHIAMO

(UN) MINORE PRINCIPALE UNA SOTTOMATRICE A' di A ottenuta così: FISSO $I \subset \{1, \dots, n\}$ (un sottoinsieme di indici) I può essere ϕ $I \neq \{1, \dots, N\}$, e definisco A' cancellando l'i-esima riga e l'i-esima colonna di A $\forall i \in I$!

Per esempio se A è 5×5 quanti minori principali ci sono?

MINORI di dim. 5 : solo A

MINORI di dim 4 : ce ne sono 5

$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5$

cancello la 1ª riga e la 1ª colonna

MINORI di dim 3

A_{12} A_{13} A_{14} A_{15} A_{23} A_{24} A_{25} A_{34} A_{35} A_{45}

$\uparrow$

cancello 1, 5 riga
1, 5 colonna

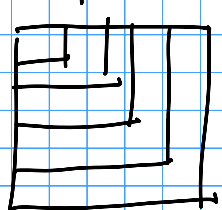
MINORI DI dim 2

A_{123} A_{124} A_{125} A_{134} A_{135} A_{145} A_{234}

A_{235} A_{245} A_{345}

MINORI DI dim 2 = elementi della diagonale

<u>Def.</u> Chiamo MINORE PRINCIPALE DOMINANTE di ordine n con $n = 1 \dots N$ la sottomatrice A_n ottenuta cancellando le ULTIME $N-n$ righe e $N-n$ colonne



$A = A_N$

$A_1 = \{a_{11}\}$

$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$\vdots$

<u>CRITERIO DI SYLVESTER:</u>

A $N \times N$ simmetrica

- $A > 0 \iff \det A_n > 0 \quad \forall A_n$ minore principale dominante
- $A \geq 0 \iff \det A' \geq 0 \quad \forall A'$ minore principale
- $A < 0 \iff -A > 0 \iff (-1)^n \det A_n > 0 \quad \forall A_n$ min. princ. dom.
- $A \leq 0 \iff -A \geq 0 \iff (-1)^k \det A' \geq 0$ per ogni A' min. princ. dove $k = \dim A'$

Per es. se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

$A > 0 \iff a > 0, \quad ac - b^2 > 0$

$A < 0 \iff a < 0 \quad ac - b^2 > 0$

Pensare al caso $b = 0$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$

se A è 3×3 $\quad \begin{bmatrix} \boxed{A_2} & \\ & \end{bmatrix}$

$A > 0 \qquad a_{11} > 0 \qquad \det A_2 > 0 \qquad \det A > 0$

$A < 0 \qquad a_{11} < 0 \qquad \det A_2 > 0 \qquad \det A < 0$

Nell'esempio visto ieri $\quad f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

che corrisponde alla matrice $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Dal criterio di Sylvester vedo che $\quad a_{11} = 1 > 0$

e $\det A = 1 \cdot 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4} > 0 \quad \Rightarrow A > 0$

$\Rightarrow f \to +\infty$ se $\|x\| \to \infty$

ESEMPIO $\quad \phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy$

VORREI SAPERE se $\phi > 0$ / $\phi < 0$ / NESSUNA DELLE DUE

ϕ è associato alla matrice $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vediamo se A verifica il criterio di Sylvester

$a_{11} = 1 > 0$ (o $A > 0$ o niente..)

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ che ha det. $1 - 4 < 0$ NIENTE DA FARE

Per curiosità vediamo $\det A = \det A_3 = \det A_2 < 0$

DUNQUE NON È > 0, NON È < 0, ha $\det \neq 0$

$\Rightarrow$ A è INDEFINITA

FINE