Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 05 03/10/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Riprendiamo l'esempio (NON ERA FINITO ...)

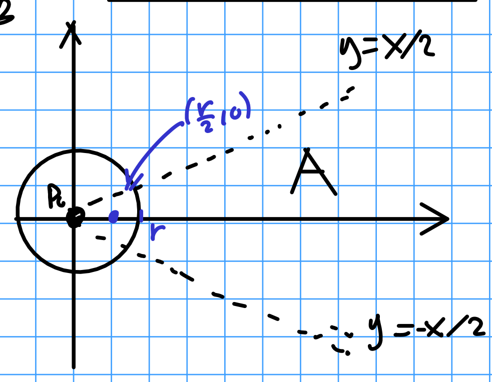
$$A = \{ (x,y) : x>0, |y|< x/2 \} = \{ (x,y) : x>0 \ -x/2 < y < x/2 \}$$

$P_0 = (0,0)$ $\qquad f(x,y) : A \to \mathbb{R}$ definito da

$$f(x,y) = \left(\frac{(x+y)^2}{x-y}, \frac{(x-y)^2}{x+y} \right) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

VISTO IERI CHE P_0 è di accumulazione per A

(A è aperto!)



Modo più semplice

Dato $r>0$

Prendo $P = (r/2, 0)$

$P \in A$ e $\|P-P_0\| = \|P\| = \frac{r}{2} < r$

Vediamo se esiste il limite di $f(x,y)$ per $(x,y)\to(0,0)$

DUE PROBLEMI → INDIVIDUARE "UN CANDIDATO" ℓ
→ DIMOSTRARE che ℓ verifica la def. di limite

Uso un fatto (di cui parliamo dopo):

[Se $f(x,y) \to \ell \; (= (\ell_1, \ell_2))$, allora la restrizione di f sull'asse x, $x>0$ avrebbe lo stesso limite]

Se allora prendi i punti del tipo $(x,0)$ con $x>0$ mi riconduco a calcolare (metto $y=0$)

$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+0)^2}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f_2(x,0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x-0)^2}{x+0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

DUNQUE L'UNICO POSSIBILE LIMITE È $(0,0)$

VEDIAMO SE $\ell = (0,0)$ verifica la definizione

Facciamo il caso di $f_1 = \dfrac{(x+y)^2}{x-y}$

NOTIAMO CHE, se $(x,y) \in A$,

$$-\frac{x}{2} < y < \frac{x}{2} \quad \text{e anche} \quad -\frac{x}{2} < -y < \frac{x}{2}$$

da cui (aggiungo x) (se $(x,y)\in A$)

$$0 < \frac{x}{2} < x-y < \frac{3}{2}x \quad \text{E} \quad 0 < \frac{x}{2} < x+y < \frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow \quad 0 < f_1(x,y) < \frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{\frac{x}{2}} = \frac{9}{4}x^2 \cdot \frac{2}{x} = \frac{9}{2}x$$

$$= \frac{9|x|}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{2}\|(x,y)\|$$

DUNQUE se $(x,y) \in A$

$$0 < f_1(x,y) \leq \frac{9}{2} \|(x,y)\|$$

Da questa disuguaglianza riesco a dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$$

applicando la def. Infatti dato $\varepsilon > 0$ posso prendere

$r = \frac{2}{9}\varepsilon$. Se faccio così:

$(x,y) \in A$, $\underbrace{(x,y) \neq 0}_{\text{è automatico perché } (0,0) \notin A}$, $\|(x,y)\| < r = \frac{2}{9}\varepsilon$ $\Rightarrow$ (dalla disuguaglianza)

$$|f_1(x,y)| < \frac{9}{2}\|(x,y)\| < \frac{9}{2}\frac{2}{9}\varepsilon = \varepsilon$$

POTEVO ANCHE RAGIONARE COSÌ:

$$0 < f_1(x,y) < \frac{9}{2}x$$

Inoltre $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ (una delle proprietà che scrivo dopo)

e vale il "teorema dei carabinieri" (vedi dopo)

f_1 è compresa tra due funzioni che tendono a zero $\Rightarrow$ $f_1 \to 0$

- f_2 si tratta allo stesso modo e dunque

$$f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)\ ((x,y)\in A)} (0,0)$$

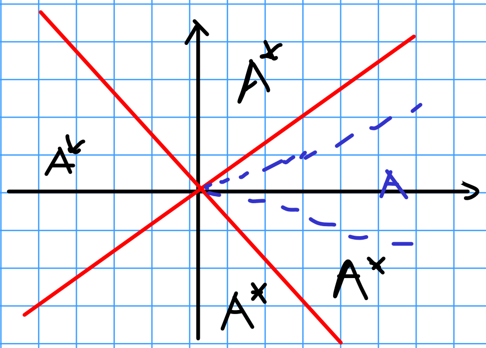
ATTENZIONE la f scritta sopra è definita solo su A!!

Se prendo il "dominio naturale" di

$$\left(\frac{(x+y)^2}{x-y}, \frac{(x-y)^2}{x+y}\right)$$

trovo $A^* = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \quad |x| \neq |y| \}$ ($\mathbb{R}^2$ eccetto le due diagonali principali $y=x$, $y=-x$)

$x^2 \neq y^2$



VEDIAMO DOPO CHE la funzione su A^* NON HA LIMITE

CONTINUIAMO CON LE PROPRIETÀ GENERALI DEI LIMITI.

$A \subset \mathbb{R}^N$ x_0 di acc. per A

UNICITÀ VISTA

LIMITI E COMPONENTI

(1) $f : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad \ell \in \mathbb{R}^M$

$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell \iff f_i(x) \to \ell_i \quad i = 1 \ldots M$

VISTA

(2) Dato i tra 1 e M indico con $\pi_i : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$

$\pi_i(x) = x_i$ (la proiezione sull'asse i-esimo)

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \pi_i(x) = \pi_i(x_0)$$

$(y = \pi_2(x,y,z))$

Per esempio $\lim_{(x,y,z)\to(1,3,5)} y = 3$

PRODOTTI VARI

(1) $f: A \to \mathbb{R}^M$ $g: A \to \mathbb{R}$

e, se $x \to x_0$, $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}^M$ $g(x) \to \lambda \in \mathbb{R}$

ALLORA $g(x)f(x) \to \lambda \ell$

(2) $f, g: A \to \mathbb{R}^M$ $f(x) \to \ell_1$ $g(x) \to \ell_2$

ALLORA $f(x) \cdot g(x) \to \ell_1 \cdot \ell_2$ (PROD. SCAL.)

(3) $f, g: A \to \mathbb{R}^3$ $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$

ALLORA $f(x) \otimes g(x) \to \ell_1 \otimes \ell_2$

(4) In uno dei casi sopra, se una funzione tende a zero e l'altra è limitata $\Rightarrow$ il prodotto tende a zero

COSA VUOL DIRE LIMITATA ?

Def. • $A \subset \mathbb{R}^N$ è limitato se esiste $R > 0$ per cui $\forall x \in A$ $\|x\|_N \leq R$ $(A \subset B(0, R))$

• $f: A \to \mathbb{R}^M$ è limitata su A se $f(A)$ è limitato in $\mathbb{R}^M$ $\Leftrightarrow$

$\exists\, R>0$ tale che $\forall x \in A \quad \|f(x)\|_M \leq R$

<u>LINEARITÀ</u> Se $f, g : A \to \mathbb{R}^M \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$f(x) \to \ell_1 \qquad g(x) \to \ell_2$ ALLORA

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \to \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$$

<u>LIMITE E ORDINE</u> (nel caso a VALORI REALI)

Considero $f, g : A \to \mathbb{R}$

<u>MONOTONIA</u> Se $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in A$, $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$

$\Rightarrow \ell_1 \geq \ell_2$ (siamo in $\mathbb{R}$!)

<u>PERMANENZA</u> - $f(x) \to \ell_1 \quad g(x) \to \ell_2$ e $\ell_1 > \ell_2$

$\Rightarrow f(x) > g(x)$ per ogni x in un intorno di x_0, eccetto x_0

IN ALTRI TERMINI $\exists\, r>0$ tale che $\forall x \in A, x \in B(x_0, r), x \neq x_0$
vale $f(x) > g(x)$

<u>CARABINIERI</u> Se $g \leq f \leq h$, tutte da $A \to \mathbb{R}$

$g(x) \to \ell$, $h(x) \to \ell \Rightarrow f(x) \to \ell$

[IN PARTICOLARE se $f : A \to \mathbb{R}^M$ e $\ell \in \mathbb{R}^M$ e se

$\|f(x) - \ell\|_M \leq g(x)$

dove $g : A \to \mathbb{R}$ e $g(x) \to 0$ $\Rightarrow f(x) \to \ell$]

<u>COMPOSIZIONE DI LIMITI</u> (cambio di variabile ?!)

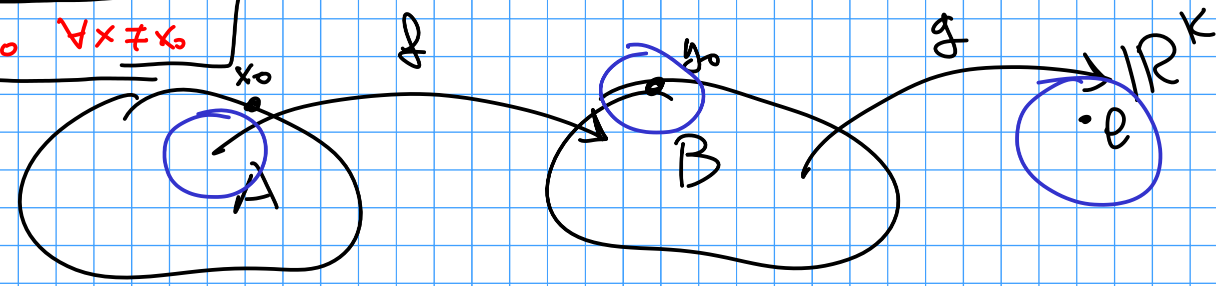
Suppongo che $A \subset \mathbb{R}^N$ x_0 pto di acc. per A

$B \subset \mathbb{R}^M$ y_0 pto di acc. per B

$f: A \to B$ $\qquad g: B \to \mathbb{R}^K$ $\qquad \ell \in \mathbb{R}^K$

PIÙ LA CONDIZIONE

$\boxed{f(x) \neq y_0 \quad \forall x \neq x_0}$



e inoltre $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ $\qquad \displaystyle\lim_{y \to y_0} g(x) = \ell$

ALLORA $\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$

Si dimostra "mettendo in fila" le definizioni di limite

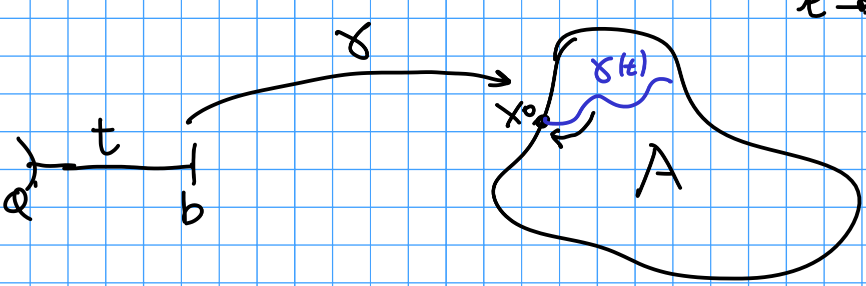
ESEMPIO DI UTILIZZO DEL TEOR. DI COMPOSIZIONE

Supponiamo $f: A \to \mathbb{R}^M$, x_0 di acc. $\ell \in \mathbb{R}^M$

Supponiamo di avere una "curva" in $A \setminus \{x_0\}$

e cioè una funzione $\gamma:]a, \underset{t}{b}] \to \underbrace{A \setminus \{x_0\}}_{\gamma(t) \in A,\ \gamma(t) \neq x_0}$

con la proprietà che $\displaystyle\lim_{t \to a^+} \gamma(t) = x_0$



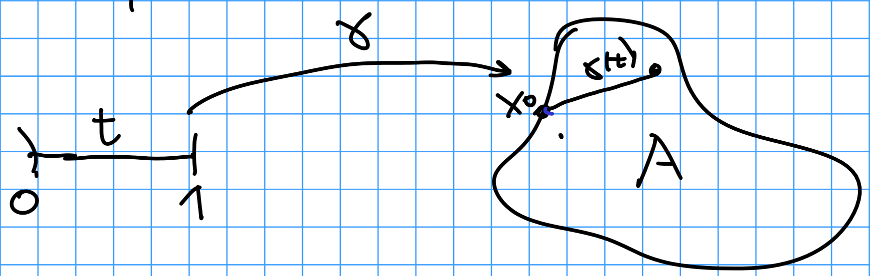
se $t \to a$ $\quad \gamma(t) \to x_0$

ALLORA se $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell \Rightarrow f(\gamma(t)) \xrightarrow{t \to a^+} \ell$

PIÙ IN PARTICOLARE POTREI AVERE

$\gamma(t) = x_0 + t\vec{v}$ dove $\vec{v}$ è un vettore assegnato in $\mathbb{R}^N$

$a=0,\ b=1$



A deve contenere il segmento

DUNQUE "STO FACENDO LA RESTRIZIONE" DI f

sul segmento $\{x_0 + t\vec{v} \quad 0 < t \leq 1\} \subset A$

DUNQUE se $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l \Rightarrow f(x_0 + t\vec{v}) \xrightarrow{t \to 0^+} l$

QUESTE RESTRIZIONI DANNO CONDIZIONI NECESSARIE MA $\boxed{\text{NON SUFFICIENTI}}$ PER AVERE CHE $f \to l$

Torniamo all'esempio di prima

$$f_1(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x-y}$$

AVEVO VISTO CHE se f è definita su $A = \{x>0,\ |y| < x/2\}$

$\Rightarrow \quad f_1(x,y) \to 0 \quad$ per $(x,y) \to (0,0)$

Però potrei considerare f su $A^* = \{(x,y) : x^2 \neq y^2\}$

PROVIAMO A VEDERE I "LIMITI SULLE RETTE"

Nel punto $P_0 = (0,0)$. IN ALTRI TERMINI

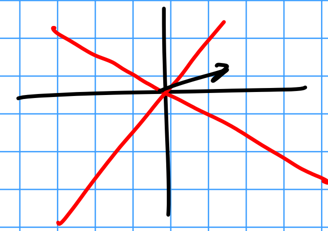
FISSIAMO UN VETTORE $\vec{v} = (v_x, v_y)$ in $\mathbb{R}^2$

e vediamo se si può fare

$$\lim_{t\to 0^+} f_1(P_0+t\vec{v})$$

PRIMA DI TUTTO DEVO CHIEDERMI se $P_0+t\vec{v}\in A^*$

$\iff \quad \vec{v}\in A^* \quad \iff \quad v_x \neq \pm v_y$



$v=(1,1)$
$v=(1,-1)$ SONO "PROIBITI"

se invece $v_x\neq v_y$ e $v_x\neq -v_y$ allora OK.

DUNQUE PRENDO "$\vec{v}$ ammissibile" $(|v_x|\neq|v_y|)$
e cerco di calcolare

$$\lim_{t\to 0^+} f_1(P_0+t\vec{v}) = \lim_{t\to 0^+} f_1(tv_x,tv_y) =$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(tv_x+tv_y)^2}{tv_x-tv_y} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2\,(v_x+v_y)^2}{t\,(v_x-v_y)} = 0$$

SU TUTTE LE RETTE "AMMISSIBILI" CHE ESCONO da $(0,0)$ f tende a zero

PURTROPPO PERÒ QUESTO NON BASTA PER DIRE che $f_1(x,y)\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$ in A^*

INFATTI POSSO CONSIDERARE

$$\gamma(t)=(t,\ t-t^2)$$

VEDIAMO se $\gamma(t)\in A^*$. Devo verificare

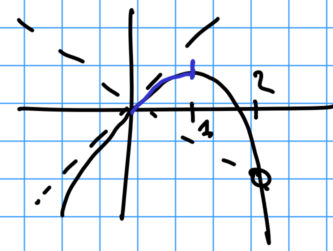
(1) $t \neq t-t^2 \iff t^2=0 \iff t=0$

(se $t\neq 0$ $\gamma(t)$ NON TOCCA LA DIAGONALE $\{x=y\})$

(2) $t \neq -t + t^2 \qquad (x \neq -y)$

$$\Updownarrow$$

$$2t = t^2 \iff t = 0, \quad t = 2$$



NOTA CHE $\gamma(t)$ descrive la parabola di equazione

$t = x \qquad \boxed{y = x - x^2}$

$$\gamma(t) = (\underset{\substack{\uparrow \\ x}}{t},\ t - t^2)$$

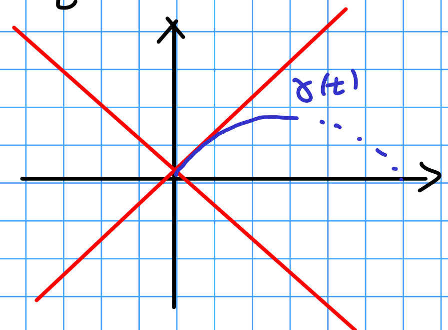
DUNQUE se prendo $t \in \,]0,1]$ sono sicuro che $\gamma(t) \in A^*$

INOLTRE $\displaystyle \lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = \lim_{t \to 0^+} (t, t - t^2) = (0,0)$

QUINDI se f_1 avesse limite ZERO dovrei avere $\displaystyle \lim_{t \to 0^+} f_1(\gamma(t)) = 0$

MA $\displaystyle \lim_{t \to 0} f_1(t, t - t^2) = \lim_{t \to 0^+} \frac{(t + t - t^2)^2}{t - (t - t^2)} =$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{(2t - t^2)^2}{t^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\cancel{t^2}(2-t)^2}{\cancel{t^2}} = \lim_{t \to 0^+} (2-t)^2 = 4 \neq 0$$



se prendessi $\gamma(t) = (t, t - t^4)$ (PIÙ TANGENTE ANCORA)

$$\Rightarrow f(\gamma(t)) = f(t, t - t^4) = \frac{t^2(2 - t^3)^2}{t^4} = \frac{(2 - t^3)^3}{t^2} \to +\infty$$

f_1 HA limite su A, NON HA limite su A^*

LIMITI INFINITI

Def. Se $A \subset \mathbb{R}$ dico che:

$+\infty$ è di accumulazione se A non è limitato superiormente (cioè $\forall R \ \exists x \in A$ con $x > R$)

$-\infty$ è di accumulazione se A non è limitato inferiormente (cioè $\forall R \ \exists x \in A$ con $x < R$)

Se $A \subset \mathbb{R}^N$ dico che (non è del tutto standard)

∞ è di accumulazione per A se A è illimitato

(cioè $\forall R \ \exists x \in A$ tale che $\|x\| > R$)

Def. (limiti infiniti) $A \subset \mathbb{R}^N$ x_0 di acc. per A

dico che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ (-\infty)$ se

$\forall C \in \mathbb{R} \ \exists r > 0$ tale che

$x \in A, \ x \neq x_0, \ \|x - x_0\| < r$ si ha $f(x) > c \ (f(x) < c)$

Def. (limiti all'infinito)

- $A \subset \mathbb{R}$ $\begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$ di acc. per A $f: A \to \mathbb{R}^M$ $\ell \in \mathbb{R}^M$

  dico che $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = \ell$

  se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C \in \mathbb{R} : \ \forall x \in A, \ \begin{matrix} x > c \\ (x < c) \end{matrix} \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_M < \varepsilon$

- (non standard)

  Se $A \subset \mathbb{R}^N$, ∞ è di acc. per A, $f: A \to \mathbb{R}^M \ni \ell$

Dico che $\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell\right)$

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \ell$$

se $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, R > 0$ tale che

$$x \in A,\ \|x\| > R \implies \|f(x) - \ell\|_M < \varepsilon$$

- Si possono poi combinare le definizioni mettendo gli infiniti sia in partenza che in arrivo.

Così facendo si ritrovano le def. di Analisi 1 TRANNE CHE NEL CASO

$f: A \to \mathbb{R}$ $\qquad A$ illimitato (∞ è di acc. per A)

$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty \ (-\infty)$ se

$\forall\, c \in \mathbb{R} \quad \exists\, R > 0$ tale che

se $x \in A \quad \|x\| > R \implies f(x) > c \ (< c)$

<u>Per esempio</u> consideriamo

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 \qquad (f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$$

Dico che $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$.

<u>USO</u> la disuguaglianza NOTEVOLE

$$|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2}$$

INFATTI la dis. equivale a

$$-x^2 - y^2 \le 2xy \le x^2 + y^2$$

VERE ENTRAMBE PERCHÉ

$0 \leq (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$ (dis. a sx)

$0 \leq (x-y)^2 = x^2+y^2-2xy$ (dis. a dx)

$\left(|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \right.$

TORNIAMO A $f(x,y) = x^2+y^2+xy \geq$

$x^2+y^2-|xy| \geq x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{2} = \frac{x^2+y^2}{2}$

DUNQUE $f(x,y) \geq \frac{\|(x,y)\|^2}{2}$

$\Rightarrow$ $f(x,y) \to +\infty$ se $\|(x,y)\| \to +\infty$

dato che $\|(x,y)\|^2 \to +\infty$ come si vede facilmente

$\#$