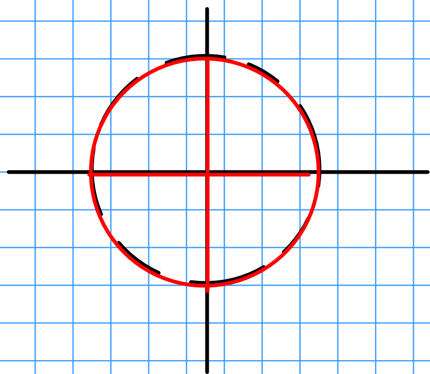
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 04   02/10/2023

$A=\{x^2+y^2<1,\ xy\neq 0\}$ $\qquad \partial A = ??$



A = DISCO $\setminus$ ZONAROSSA

DICO CHE ∂A = ZONA ROSSA =

$\{xy=0 \quad |x|\le 1 \quad |y|\le 1\} =$

$\{x=0 \quad -1\le y\le 1\}\cup\{y=0 \quad -1\le x\le 1\}$

. SI POTREBBE USARE LA DEF.

. **OSS**

$$A=\{\overbrace{g(x,y)<1,\ h(x,y)>0}^{A_1}\}\cup\{\overbrace{g(x,y)<1,\ h(x,y)<0}^{A_2}\}$$

dove $g(x,y)=x^2+y^2$, $h(x,y)=xy$ $\leftarrow$ SONO "CONTINUE" (lo vediamo ...)

ALLORA (fatto generale che vedremo)

$$\partial A_1 \subset \{g=1 \quad h\ge 0\}\cup\{g\le 1,\ h=0\}$$ CI FIDIAMO

$$\partial A_2 \subset \{g=1 \quad h\le 0\}\cup\{g\le 1 \quad h=0\}$$ (lo dimostreremo)

$$\Rightarrow \partial A \subset \partial A_1\cup\partial A_2 = \underbrace{\{g=1,\ h \text{ qualunque}\}\cup\{g\le 1,\ h=0\}}_{\text{ZONA ROSSA}}$$

PIÙ IN GENERALE se $A=\{g_1<0,\dots,g_k<0\}$

con $g_1\dots g_k$ CONTINUE

$$\Rightarrow \partial A \subset \{g_1=0,\ g_2\le 0 \dots g_k\le 0\}\cup\{g_1\le 0,\ g_2=0,\dots g_k\le 0\}\cup\dots\cup\{g_1\le 0 \quad g_{k-1}\le 0,\ g_k=0\}$$

A noi serve l'inclusione opposta...

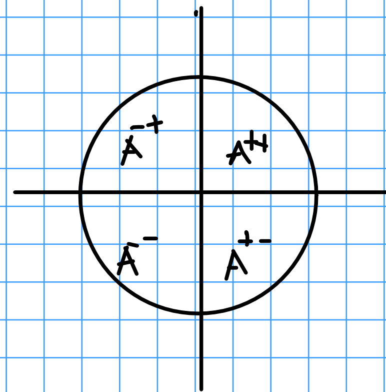
Si potrebbe usare la def. e mostrare che ognuno dei pti rossi ' è effettivamente di frontiera.

OPPURE proviamo a usare le proprietà dette l'altra volta.

Conviene dividere A in quattro pezzi:

$$A = A^{++} \cup A^{+-} \cup A^{-+} \cup A^{--}$$

$A^{++} = \{ x^2 + y^2 < 1,\ x>0,\ y>0 \}$
$A^{+-} = \{ x^2 + y^2 < 1,\ x>0,\ y<0 \}$
$A^{-+} = \{ \ldots\ldots\ x<0,\ y>0 \}$
$A^{--} = \{ \ldots\ldots\ x<0,\ y<0 \}$



SONO TUTTI APERTI : $A^{++} = \underbrace{B(0,1)}_{\text{aperto}} \cap \underbrace{\{x>0\}}_{\text{aperto}} \cap \underbrace{\{y>0\}}_{\text{aperto}}$
e sono disgiunti.

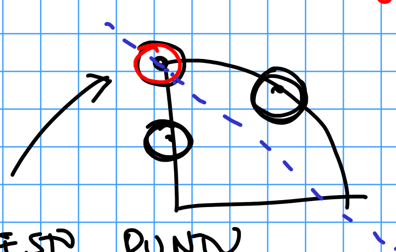
AVEVO DETTO che se E, F, sono aperti disgiunti $\Rightarrow \partial(E \cup F) = \partial E \cup \partial F$

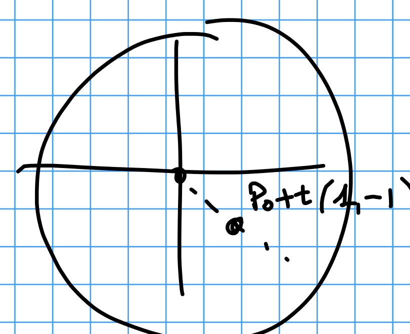
$$\Rightarrow \partial A = \partial A^{++} \cup \partial A^{+-} \cup \partial A^{-+} \ \partial A^{--}$$

Ora serve che:

$$\partial A^{++} = \{ x^2+y^2=1,\ x\geq 0, y\geq 0 \} \cup \{ x=0\ \ 0\leq y\leq 1 \} \cup \{ y=0,\ 0\leq x\leq 1 \}$$

Per questo della prima volta "$\subset$" ← SI DEVE FARE CON LA Definizione (dentro solo - forse - fare definizione)





prendo $r>0$ e cerco $p' \in B(P_0, r) \cap A$

posso prendere $P_0 + t(1,-1)$ con t piccolo $t>0$
$(t<r)$

Def. di limite

$A \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ di accumulazione per A.

$f: A \to \mathbb{R}^M$ $\quad l \in \mathbb{R}^M$. Allora

(DEF) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ significa

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 :$

per ogni $x \in A$ con $x \neq x_0$, $\|x - x_0\|_N < r \implies \|f(x) - l\|_M < \varepsilon$

Scrivo anche:

$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$ $\quad$ ($f(x) \to l$ se $x \to x_0$ è chiaro dal contesto)

OSS e PROPRIETÀ VARIE:

UNICITÀ DEL LIMITE $\quad$ Se $f(x) \to l_1$, $f(x) \to l_2 \implies l_1 = l_2$
$(x \to x_0)$

SONO EQUIVALENTI

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l \iff \|f(x) - l\|_M \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

(il primo limite riguarda funzioni a valori in $\mathbb{R}^M$ / il secondo riguarda una funzione a valori reali)

!!

SONO EQUIVALENTI

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l \iff f_1(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1 \ \ldots \ f_M(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_M$$

dove a destra ci sono le "componenti" di $f(x)$ e di l.

$f(x, y, z) = (xy, yz)$ da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. $f_1 = xy$, $f_2 = yz$

In effetti $\quad |f_i - \ell_i| \leq \|f - \ell\| \quad \forall i = 1 \dots M$

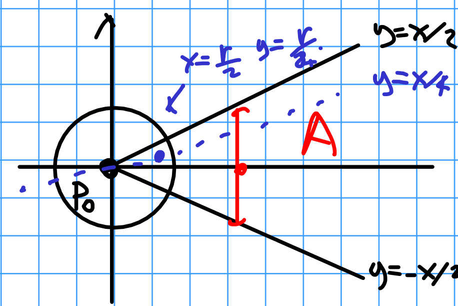
ESEMPIO $\quad A = \{(x,y) : x>0, \quad |y| < x/2\}$

$$P_0 = (0,0) \qquad f(x,y) = \left(\frac{(x+y)^2}{x-y}, \frac{(x-y)^2}{x+y} \right)$$

($P_0 \notin A$!! – $f(x,y)$ è ben definito)

Vorrei sapere se esiste e quanto fa $\lim_{P \to P_0} f(P) \qquad (P = (x,y))$

P_0 è di $\boxed{\text{accumulazione}}$. In effetti se prendo $r>0$ trovo un punto $P = (r/2, r/8) \in A$



$$\|P - 0\| = \|P\| = \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{16}} < \sqrt{\frac{r^2}{16} + \frac{r^2}{16}} = \sqrt{\frac{r^2}{8}} = \frac{r}{2\sqrt{2}} < r$$

e $P \subset A$ perché $0 < y = \frac{r}{8} < x/2 = \frac{r}{2}$

VOGLIO CAPIRE se esiste $\ell = \lim_{P \to P_0} f(x,y) =$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} \left(\frac{(x+y)^2}{x-y} \right) = ? \quad e \quad \lim_{\substack{(x,y)\to 0\\(x,y)\in A}} \frac{(x-y)^2}{x+y} = ?$$