Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 03 27/09/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

A aperto $\Leftrightarrow$ $A = \mathring{A}$ (tutti i pti di A sono interni ad A)

A chiuso $\Leftrightarrow$ $\complement A$ è aperto $\Leftrightarrow$ $\partial A \subset A$

FATTI

(a) A e B aperti $\Rightarrow$ $A \cup B$ e $A \cap B$ aperti

(a1) A e B chiusi $\Rightarrow$ $A \cup B$ e $A \cap B$ chiusi

dim. Se A e B sono aperti $\Rightarrow$ ogni $x_0 \in A$ / $x_0 \in B$ è interno ad A / a B. Dunque se $x_0 \in A$ / $x_0 \in B$ esiste un $r_A > 0$ / $r_B > 0$ per cui $B(x_0, r_A) \subset A$ / $B(x_0, r_B) \subset B$

Vediamo che $A \cup B$ è aperto. Se $x_0 \in A \cup B$
$\Leftrightarrow$ $x_0 \in A$ oppure $x_0 \in B$.

nel primo caso $B(x_0, r_A) \subset A \subset A \cup B$

nel secondo caso $B(x_0, r_B) \subset B \subset A \cup B$

Ho DIM. CHE $\forall x_0 \in A \cup B$ $\exists r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset A \cup B$

#

Vediamo che $A \cap B$ è aperto.

Se $x_0 \in A \cap B \Rightarrow (x_0 \in A)$ e $(x_0 \in B)$. Ma allora

$$B(x_0, r_A) \subset A \quad e \quad B(x_0, r_B) \subset B$$

Se prendo r = minimo tra r_A e r_B ho un $r > 0$ t.c.

$$B(x_0, r) \subset \begin{cases} B(x_0, r_A) \\ B(x_0, r_B) \end{cases} \subset A \cap B$$

<u>OSS</u> Se guardo l'unione $\Rightarrow$ è vera una proprietà PIÙ FORTE $\longrightarrow$

Supponiamo di avere una famiglia di INSIEMI A_i (per ogni i ho un aperto A_i) dove i varia in un insieme $\mathcal{J}$. Posso definire

$$\bigcup_{i \in \mathcal{J}} A_i = \{x \text{ tali che } \exists\, i \in \mathcal{J} \text{ per cui } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i = \{x \text{ tali che } x \in A_i \text{ per OGNI } i \in \mathcal{J}\}$$

$\Rightarrow$ FATTO Se $(A_i)_{i \in \mathcal{J}}$ è una famiglia di aperti

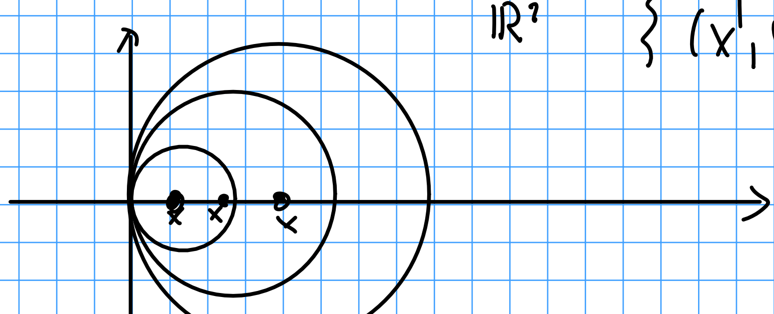
$$\Rightarrow A = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} A_i \text{ è aperto}$$

(UNIONE ARBITRARIA DI APERTI È APERTO)

(LA DIMOSTRAZIONE È IDENTICA AL CASO $A \cup B$ ...)

<u>FACCIAMO DEGLI ESEMPI</u>

Dato $x > 0$ definisco $A_x = B((x, 0), x) = \{(x', y) : (x - x')^2 + y^2 \le x^2\}$, $A_x \subset \mathbb{R}^2$



OGNI A_x è un aperto $\Rightarrow A := \bigcup_{x>0} A_i$ è aperto

CURIOSITÀ: CHI È A ??

DOVREBBE VENIRE $\boxed{A = \{(x,y) \quad x>0\} =: S}$

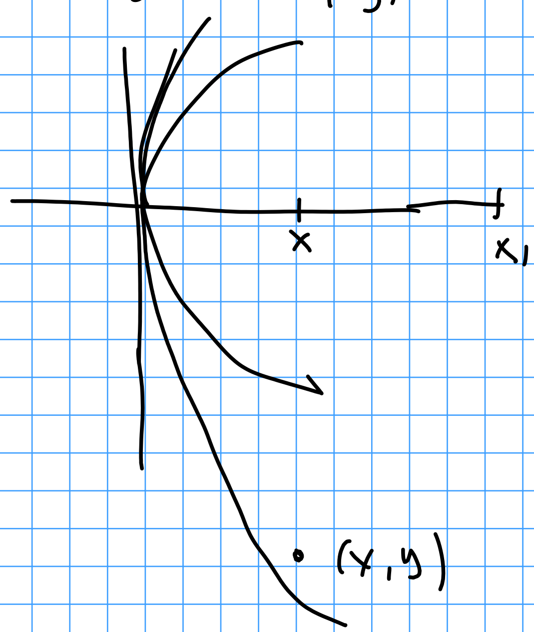
VERIFICHIAMOLO

Dimostro che $A \subset S$. QUESTO è FACILE

perché ogni $A_x = B((x,0),x) \subset S$

Viceversa sia $(x,y) \in S$, cioè un punto con $x>0$

Se p



mi serve trovare $x_1 > 0$

tale che $(x,y) \subset A_{x_1}$

Per trovare x_1 impongo che

$$d((x,y),(x_1,0)) < x_1$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-x_1)^2 + y^2 < x_1^2$$

$$x^2 - 2xx_1 + \cancel{x_1^2} + y^2 < \cancel{x_1^2}$$

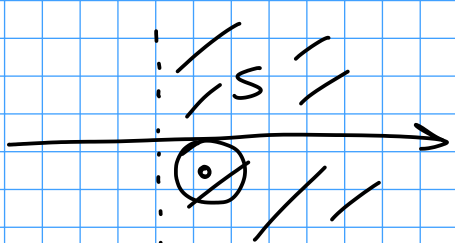
$$x_1 > \frac{x^2+y^2}{2x}$$

(NOTA che $x>0$)

Dunque se $x_1 > \dfrac{x^2+y^2}{2x} \Rightarrow$ il punto $(x,y) \in A_{x_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in A$

IN DEFINITIVA $A =$ semipiano $\{(x,y) \quad x>0\}$



$\leftarrow$ è APERTO ?? SÌ

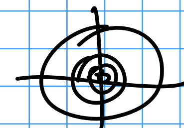
in effetti se $(x,y) \in S$, allora $x>0$, prendo $r=\frac{x}{2}>0$

$\Rightarrow B((x,y),r) \subset S$ (non faccio i dettagli.)

CONTROESEMPIO Non è vero che $\bigcap_{i\in J} A_i$ è aperto anche se gli A_i sono tutti aperti

Per esempio $A_n = B(0, 1/n)$ ← sono tutti aperti

ma $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$



(non faccio i dettagli)

↑ NON È APERTO

— Per la (a1) si può ragionare passando ai complementari:

(A è chiuso $\Leftrightarrow$ $\complement A$ è aperto — $\complement(A\cup B) = \complement A \cap \complement B$, $\complement(A\cap B) = \complement A \cup \complement B$)

FATTI

$$\boxed{\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A\cup B)^\circ \; ; \; \mathring{A} \cap \mathring{B} = (A\cap B)^\circ}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A\cup B} \; ; \; \overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A\cup B}$$

Dim.

(1) $\mathring{A} \subset A$, $\mathring{B} \subset B \Rightarrow \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A\cup B$ HO DIM. LA PRIMA

$\mathring{A} \cup \mathring{B} = (\mathring{A} \cup \mathring{B})^\circ \subset (A\cup B)^\circ$ Ma $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ è aperto $\Rightarrow$

(2) $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B \Rightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} = (\mathring{A} \cap \mathring{B})^\circ \subset (A\cap B)^\circ$

HO DIM. METÀ DELLA SECONDA

(3) $A\cap B \subset A \Rightarrow (A\cap B)^\circ \subset \mathring{A}$

$$A\cap B \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{\overbrace{A\cap B}} \subset \mathring{B} \Rightarrow$$

$$A\cap B \subset \mathring{A}\cap\mathring{B} \Rightarrow \overset{\circ}{\overbrace{A\cap B}} \subset \mathring{A}\cap\mathring{B}$$

che è l'altra metà della dim. della SECONDA

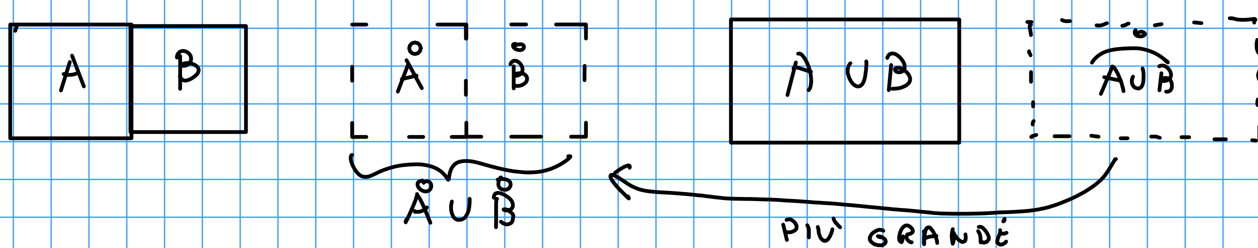
Per la seconda riga (sulle chiusure) si passa ai complementari usando la prima riga

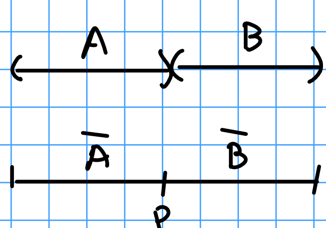
Riscrivo le proprietà:

$$\mathring{A}\cup\mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A\cup B}} \quad ; \quad \mathring{A}\cap\mathring{B} = \overset{\circ}{\overbrace{A\cap B}}$$

$$\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cup B} \quad ; \quad \overline{A}\cap\overline{B} \supset \overline{A\cap B}$$

Vediamo che nel I° e nel IV° caso non si può mettere "="





$$A\cap B = \emptyset \qquad \overline{A\cap B} = \emptyset$$

$$\overline{A}\cap\overline{B} = \{P\} \neq \emptyset$$

PIÙ GRANDE

PROPRIETÀ DELLE FRONTIERE $\left(\partial A = \overline{A}\setminus\mathring{A}\right)$

- ∂A è sempre chiusa

infatti $\complement\partial A = \mathring{A} \cup \overset{\circ}{\overbrace{\complement A}}$ ← aperto

aperti

- $\partial \bar{A} \subset \partial A$, $\partial \mathring{A} \subset \partial A$ (visto ieri)
- $\partial (A \cup B) = ??$ $\qquad \partial (A \cap B) = ??$

$$\partial (A \cup B) = \overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ = \bar{A} \cup \bar{B} \setminus (A \cup B)^\circ \subset$$

$\overline{A \cup B} \overset{\circledast}{=} \bar{A} \cup \bar{B}$ / $(A \cup B)^\circ \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

$$\subset \bar{A} \cup \bar{B} \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B}) = \bar{A} \cup \bar{B} \cap \complement(\mathring{A} \cup \mathring{B}) =$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} \cap (\complement\mathring{A} \cap \complement\mathring{B}) = (\bar{A} \cap \complement\mathring{A} \cap \complement\mathring{B}) \cup (\bar{B} \cap \complement\mathring{A} \cap \complement\mathring{B})$$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$= (\partial A \cap \complement\mathring{B}) \cup (\partial B \cap \complement\mathring{A}) =$$

$$(\partial A \setminus \mathring{B}) \cup (\partial B \setminus \mathring{A})$$

HO TROVATO CHE

$$(\bigstar) \qquad \partial (A \cup B) \subset (\partial A \setminus \mathring{B}) \cup (\partial B \setminus \mathring{A})$$

in quale passaggio non vale "=" ?! (in uno solo)

se so che $(A \cup B)^\circ = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ VALE "=" in $(\bigstar)$

VERA SE - PER ESEMPIO - A e B sono aperti

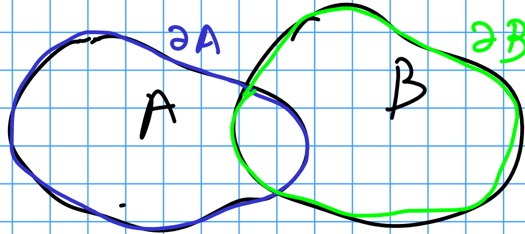
Per esempio se A e B sono aperti $A = \mathring{A}$, $B = \mathring{B}$

$\mathring{A} \cup \mathring{B} = A \cup B = (A \cup B)^\circ$ (perché $A \cup B$ è aperto

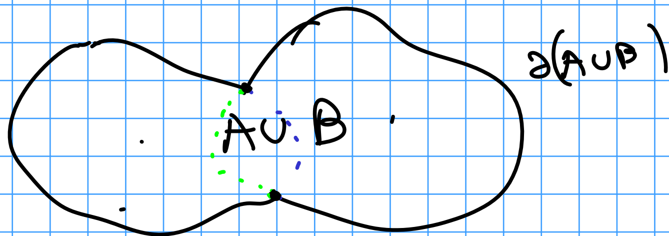
DUNQUE SE A e B sono aperti

$$\partial (A \cup B) = (\partial A \setminus B) \cup (\partial B \setminus A)$$

Se sono aperti disgiunti ho $\partial (A \cup B) = \partial A \cup \partial B$



A, B aperti



- $$\partial(A\cap B) = \overline{A\cap B} \setminus \overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \overline{A\cap B} \setminus (\mathring{A}\cap\mathring{B})$$

$$\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \mathring{A}\cap\mathring{B}$$

!!

$$\subset (\bar{A}\cap\bar{B}) \setminus (\mathring{A}\cap\mathring{B}) = (\bar{A}\cap\bar{B}) \cap \complement(\mathring{A}\cap\mathring{B}) =$$

$$(\bar{A}\cap\bar{B}) \cap (\complement\mathring{A} \cup \complement\mathring{B}) =$$

$$(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\complement\mathring{A}) \cup (\bar{A}\cap\bar{B}\cap\complement\mathring{B}) =$$

∂A $\qquad\qquad$ ∂B

$$(\partial A\cap\bar{B}) \cup (\partial B\cap\bar{A})$$

RIASSUMENDO

$$\partial(A\cap B) \subset (\partial A\cap\bar{B}) \cup (\partial B\cap\bar{A})$$

se ho $\boxed{\overline{A\cap B} = \bar{A}\cap\bar{B}}$ vale l'uguaglianza:

$$\partial(A\cap B) = (\partial A\cap\bar{B}) \cup (\partial B\cap\bar{A})$$

Se $\boxed{\text{A e B sono chiusi}}$ la prop. vale e vale:

$$\partial(A\cap B) = (\partial A\cap B) \cup (\partial B\cap A)$$

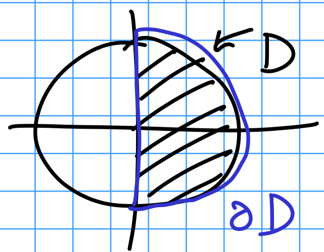
DA RICORDARE

Per esempio Consideriamo

$$D = \{ (x,y) : x^2+y^2 \leq 1, \ x \geq 0 \}$$

D è l'intersezione tra $B = \overline{B((0,0),1)}$ e

$A = \{ (x,y) : x \geq 0 \}$



A e B sono chiusi

$\partial B = S((0,0),1) = \{ x^2+y^2 = 1 \}$

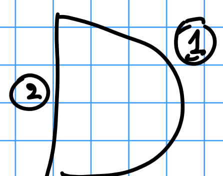
$\partial A = \{ (0,y) \quad y \in \mathbb{R} \}$

VISTO PRIMA CHE CA è aperto

$\Downarrow$ POSSO USARE LA FORMULA

$$\partial D = \{ x^2+y^2=1, \ x \geq 0 \} \cup \{ x=0, \quad y^2 \leq 1 \}$$

$$= \underbrace{\{ x^2+y^2=1, \ x\geq 0 \}}_{①} \cup \underbrace{\{ x=0, -1 \leq y \leq 1 \}}_{②}$$



ESERCIZIO TROVARE ∂F se

$$F = \{ x^2+y^2 < 1, \quad xy \neq 0 \}$$

LIMITI IN PIÙ VARIABILI

$A \subset \mathbb{R}^N \qquad x_0 \in \mathbb{R}^N$

Def. Dico che x_0 è punto di accumulazione per A

se $\forall r > 0 \ \exists \ x$ con $x \in B(x_0, r), \ x \in A, \ x \neq x_0$

$\left(\text{cioè} \quad x \in B(x, r) \cap A \setminus \{x_0\} \right)$

<u>oss.</u> se x è di acc. $\Rightarrow x \subset \bar{A}$

<u>Def</u> (limite)

$A \subset \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^M$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ di acc. per A, $\ell \in \mathbb{R}^M$.

Si dice che $f(x)$ tende a ℓ per x che tende a x_0

oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se

$$\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \text{tale che} \\ \text{se } x \in \underbrace{B(x_0, r)}_{\text{IN } \mathbb{R}^N} \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \underbrace{B(\ell, \varepsilon)}_{\text{IN } \mathbb{R}^M} \end{array} \right.$$

OPPURE

$$\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \text{tale che} \\ \text{se } x \in A, \boxed{x \neq x_0} \; \|x - x_0\|_N < r \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_M < \varepsilon \end{array} \right.$$

è una scelta NON GUARDARE $f(x_0)$ (ammesso che esista) per fare il limite

CI AGGIORNIAMO!