Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 02 26/09/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Una norma è una funzione $\vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\|$
con le proprietà: ($\vec{v}$ varia in uno spazio vettoriale)

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0$ $\quad \|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = 0$

(b) $\|t\,\vec{v}\| = |t|\,\|\vec{v}\|$

(c) $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

Nel caso di $\mathbb{R}^N$ la norma "standard" è $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_N^2}$

Con la norma misuro le distanze tra i punti:

$$d(P,Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_N - q_N)^2}$$

Posso definire gli insiemi (DISCHI / SFERE)

Def. Se $P_0 \in \mathbb{R}^N$ $r > 0$ definisco

$$B(P_0, r) = \{ P \in \mathbb{R}^N : \|P - P_0\| < r \} = \{ d(P, P_0) < r \}$$

(disco di centro P_0 e raggio r)

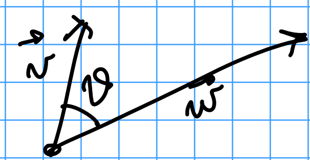
$$S(P_0, r) = \{ P \in \mathbb{R}^N : \|P - P_0\| = r \}$$

(sfera di centro P_0 e raggio r)

Scriverò anche $\overline{B}(P_0, r) = \{ \ldots \ \|P - P_0\| \leq r \} = B(P_0,r) \cup S(P_0,r)$

Nello spazio si può anche fare il PRODOTTO SCALARE tra due vettori, che corrisponde a

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cdot \cos\theta$$



SI VEDE FACILMENTE CHE, IN termini di coordinate

$(\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \qquad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3))$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

PIÙ IN GENERALE POSSO DEFINIRE in $\mathbb{R}^N$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + \ldots + v_N w_N$$

e lo chiamo prodotto scalare tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

QUESTO "prodotto scalare" ha le seguenti proprietà:

Prop. Il prod. scal. è una funzione p $(\vec{v}, \vec{w}) \to p(\vec{v}, \vec{w})$ che è un numero e tale che

(a) $p(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2, \vec{w}) = \lambda p(\vec{v}_1, \vec{w}) + \mu p(\vec{v}_2, \vec{w})$

$p(\vec{v}, \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2) = \lambda p(\vec{v}, \vec{w}_1) + \mu p(\vec{v}, \vec{w}_2)$

p è "BILINEARE" IN $(\vec{v}, \vec{w})$

(b) $p(\vec{v}, \vec{w}) = p(\vec{w}, \vec{v})$ (SIMMETRICA)

(c) $p(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0 \quad p(\vec{v}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = 0$

(POSITIVA)

IN GENERALE se X è uno sp. vett. e $p: X \times X \to \mathbb{R}$ ha le prop. (a) (b) (c) dirò che p è un prodotto scalare in X

di solito si scrive $\underline{\vec{v} \cdot \vec{w}}$ oppure $(\vec{v}, \vec{w})$ al posto di $p(\vec{v}, \vec{w})$

VEDIAMO ORA che se c'è un prodotto scalare, automaticamente c'è una norma definita da

$$\|\vec{v}\| \left(= \sqrt{p(\vec{v}, \vec{v})}\right) = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0$, $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$ (segue dalla (c))

(b) $\|t\vec{v}\| = |t| \, \|\vec{v}\|$: $\|t\vec{v}\| = \sqrt{(t\vec{v}) \cdot (t\vec{v})} = (t^2 \vec{v} \cdot \vec{v})^{1/2} = |t| \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = |t| \|\vec{v}\|$

(c) dis. triangolare ?? segue dalla:

<u>DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ</u> si ha:

(S) $\quad |\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$

Inoltre vale "=" se e solo se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono linearmente dipendenti

<u>Dimostriamola</u> a partire dalle prop. scritte sopra del prod. scal.

Se $\vec{w} = 0$ la tesi è vera. Se no consideriamo

$$g(t) = \|\vec{v} - t\vec{w}\|^2 \quad (\geq 0) \qquad \begin{array}{l} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \text{per } t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Svolgiamo $g(t) = (\vec{v} - t\vec{w}) \cdot (\vec{v} - t\vec{w}) =$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v}(-t\vec{w}) + (-t\vec{w}) \cdot \vec{v} + (-t\vec{w}) \cdot (-t\vec{w}) =$$

$$\|\vec{v}\|^2 - t\, \vec{v} \cdot \vec{w} - t\, \vec{w}\, \vec{v} + t^2 \|\vec{w}\|^2 =$$

$$(g(t) =)\ \|\vec{v}\|^2 - 2t\, \vec{v} \cdot \vec{w} + t^2 \|\vec{w}\|^2$$ ← binomio in t di 2° grado

Ne segue che il "delta" deve essere ≤ 0 ;

$$\cancel{4}\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)^2 - \cancel{4}\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)^2 \leq \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|$$

Se vale "=" $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, \bar{t} \in \mathbb{R}$ per cui $g(\bar{t}) = 0 \Longleftrightarrow$

$$\|\vec{v} - \bar{t}\,\vec{w}\|^2 = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} - \bar{t}\,\vec{w} = 0$$

dunque $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono lin. dip. #

Dimostriamo allora che vale la dis. triangolare (per $\|\vec{v}\| := \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$)

Infatti se prendo due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

$$\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{v}\cdot\vec{w} + \|\vec{w}\|^2 \leq \quad (\text{Schwartz})$$

$$\|\vec{v}\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|\vec{w}\|^2 =$$

$$\left(\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

#

DUNQUE $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_N^2}$

è effettivamente una norma per ogni N intero

Dalla dis. di Schwartz si ricava che ha senso definire "l'angolo" tra due vettori $\underbrace{\vec{v} \text{ e } \vec{w}}$ (in $\mathbb{R}^N$) ponendo

NON NULLI

$$\cos(\theta) := \underbrace{\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|}}_{\text{è compreso tra } -1 \text{ e } 1}$$

"TOPOLOGIA" indotta dalla norma

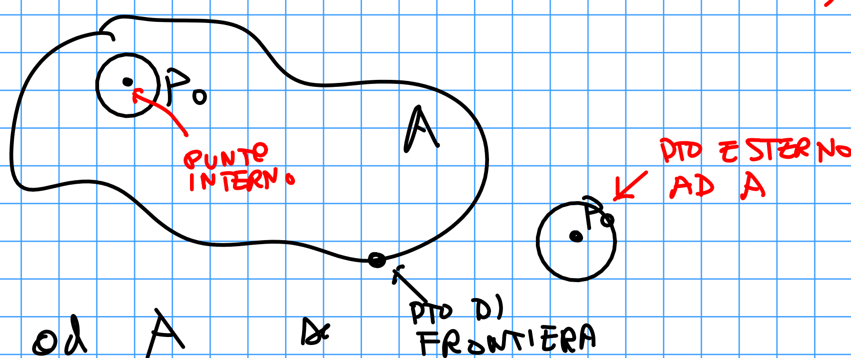
Siamo in $\mathbb{R}^N$ (potrebbe essere uno spazio vett. con una norma)

$A \subset \mathbb{R}^N$ e $P_0 \in \mathbb{R}^N$

DICIAMO CHE

(1) P_0 è <u>INTERNO</u> ad A se

$\exists\, r > 0$ per cui $B(P_0, r) \subset A$ ($\Rightarrow P_0 \in A$ ma è di più !!)



(2) P_0 è ESTERNO ad A se

$\exists\, r > 0$ per cui $B(P_0, r) \cap A = \emptyset$

(3) Se P_0 NON VERIFICA NÉ (1) NÉ (2) dico che P_0 è un <u>PUNTO DI FRONTIERA</u> per A

<u>SI VEDE CHE:</u>

P_0 è di frontiera per $A \Longleftrightarrow \forall r > 0$ esistono $P_1 \in A$, $P_2 \notin A$ tali che $P_1, P_2 \in B(P_0, r)$

CHIAMO INTORNO DI P_0 UN QUALUNQUE INSIEME U che contiene $B(P_0, r)$ per un opportuno $r > 0$

__Def.__ Dato A chiamo:

- PARTE INTERNA DI A l'insieme

$$\mathring{A} = \{ P \in \mathbb{R}^N : P \text{ è interno ad } A \}$$

- FRONTIERA DI A l'insieme

$$\partial A := \{ P \in \mathbb{R}^N : P \text{ è di frontiera per } A \}$$

- CHIUSURA DI A

$$\overline{A} := \mathring{A} \cup \partial A$$

DIRÒ che A è APERTO se $A = \mathring{A}$

A è CHIUSO se $A = \overline{A}$

Non è detto che un insieme generico sia per forza o aperto o chiuso

(IN $\mathbb{R}$) $[a,b]$ chiuso $]a,b[$ aperto $[a,b[$ NÉ aperto né chiuso

VARIE OSSERVAZIONI:

- i punti esterni ad A sono i punti interni a $\complement A = \mathbb{R}^N \setminus A$
  $\left(\text{"ext} A\text{"} = \mathring{\overbrace{\complement A}} \right)$
- i PUNTI ESTERNI ad A SONO $\complement \overline{A}$ (vedi la def)
- $\boxed{\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}}$

La prima inclusione è ovvia. La seconda segue dal fatto che se $P \notin \overline{A} \Rightarrow P$ è esterno $\Rightarrow P \notin A$ ($\Rightarrow P \in A \Rightarrow P \in \overline{A}$)

- $\overline{A} = A \cup \partial A$ infatti:

$$A \cup \partial A \supset \mathring{A} \cup \partial A$$

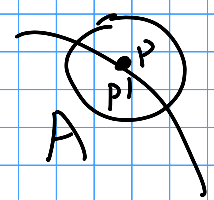
d'altra parte $A \subset \overline{A} \Rightarrow A \cup \partial A \subset \overline{A}$

$\Bigg\} \Leftarrow A \cup \partial A = \overline{A}$

perché se $x \notin \overline{A} \Rightarrow x$ è esterno ad $A \Rightarrow x \notin A$

- A è chiuso $\iff \partial A \subset A$

- $P \in \bar{A} \iff \forall r>0 \ \exists\, P' \in A$ con $P' \in B(P,r)$



se non fosse vero $\exists\, r>0$ per cui $B(P,r) \cap A$

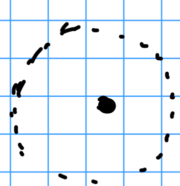
cioè P sarebbe esterno ad A – MA QUESTO È IMPOSSIBILE

perché $P \in \bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

•

$$\partial \bar{A} \subset \partial A$$
$$\partial \mathring{A} \subset \partial A$$

IN GENERALE NON VALE "=" Per esempio



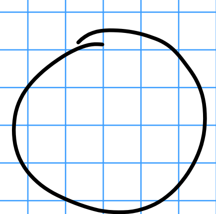
$A = B(0,1) \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1\}$

INTUITIVAMENTE (POI LO PRECISIAMO)

$\bar{A} = \{0 \le x^2+y^2 \le 1\} = \{x^2+y^2 \le 1\}$ (DISCO CHIUSO)

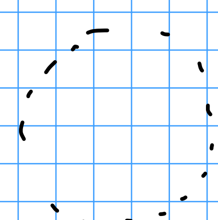
$\partial A = S(0,1) \cup \{(0,0)\}$

$\partial \bar{A} = \partial\{x^2+y^2 \le 1\} = S(0,1) \neq \partial A$



$\leftarrow \bar{A}$

$\partial \bar{A}$



OPPURE $A = \{(0,0)\}$ $\quad \partial A = A = \{(0,0)\}$

MA $\mathring{A} = \emptyset$ $\quad \partial \emptyset = \emptyset$

Per verificare che valgono le inclusioni:

$$\partial \bar{A} \subset \partial A$$
$$\partial \mathring{A} \subset \partial A$$

possiamo fare così: $\quad \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

$$\partial \bar{A} = \bar{\bar{A}} \setminus \mathring{\bar{A}} = \bar{A} \setminus \mathring{\bar{A}} \underbrace{\subset}_{1} \bar{A} \setminus \mathring{A} = \partial A$$

$$\partial \mathring{A} = \overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{\mathring{A}} = \overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{A} \subset \bar{A} \setminus \mathring{A} = \partial A$$

• $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ $\qquad \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$ $\qquad$ mentre

$$\underbrace{\mathring{\bar{A}} \supset \mathring{A}}_{1} \qquad \underbrace{\overline{\mathring{A}} \subset \bar{A}}_{2}$$

Le prime due sono facili (per esercizio).
Vediamo la terza $\quad A \subset \bar{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\bar{A}}$
La quarta $\quad \mathring{A} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \bar{A}$

• $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ / $\bar{A} \subset \bar{B}$ & segue facilmente dalle def.

ESEMPIO IN $\mathbb{R}^2$

$$B = B(0,1) = \{x^2 + y^2 < 1\} \qquad S = \{x^2 + y^2 = 1\}$$

(B = disco di centro (0,0) e raggio 1, S = sfera di centro (0,0) raggio 1)

VEDIAMO (usando le definizioni) che

(i) B è aperto $\quad (B = \mathring{B})$

(ii) $\partial B = S$

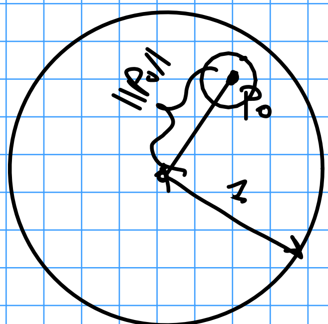
(iii) $\Rightarrow \overline{B} = B \cup S = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ (segue subito da (i) e (ii))

(iv) $\partial \overline{B} = \partial B$

<u>Dim</u> (i) B è aperto $\leftrightarrow$ ogni punto di B è interno a B

Prendo $P_0 \in B$, cioè $\|P_0\| < 1$. Posso trovare un numero $r>0$ tale che $\|P_0\| + r < 1$ (per es. $r = \frac{1-\|P_0\|}{2}$)

Dico che $\boxed{B(P_0, r) \subset B}$ ← infatti se



$P \in B(P_0, r) \Leftrightarrow \|P-P_0\| < r \Rightarrow$

$\|P\| = \|P-P_0+P_0\| \leq \|P-P_0\| + \|P_0\|$

$< r + \|P_0\| < 1 \Rightarrow P \in B(0,1)$

Questo lo faccio per ogni $P_0 \in B$ $\Rightarrow$ $\boxed{B \text{ è aperto}}$

(ii) ← devo dimostrare due cose

(ii a) $\boxed{\partial B \subset S}$ (ii b) $S \subset \partial B$

(ii a) Prendo $P_0 \in \partial B \Rightarrow P_0 \notin B$ $(B = \mathring{B}$ e $\mathring{B} \cap \partial B = \emptyset)$

$\Rightarrow \forall r>0 \ \exists P \in B, \ P \in B(P_0, r)$ ALLORA

$\|P_0\| = \|P_0 - P + P\| \leq \|P_0 - P\| + \underbrace{\|P\|}_{\in B = \{\|P\|<1\}} < r + 1$

DUNQUE $\forall r>0$ $\|P_0\| < 1+r \Leftrightarrow \|P_0\| \leq 1$

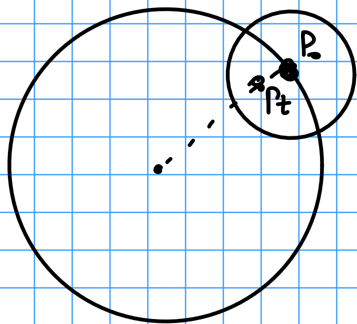
Se però $\|P_0\| < 1 \Rightarrow P_0 \in B$ impossibile perché $P_0 \in \partial B$

$\Rightarrow \|P_0\| = 1$ cioè $P_0 \in S$

(ii b) Prendo $P_0 \in S$, cioè $\|P_0\| = 1$ è facile vedere che $tP_0 =: P_t \in \begin{cases} B & \text{se } t<1 \\ \complement B & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

Dunque dato $r>0$ qualunque trovo dei $P_t \in B \cap B(P_0,r)$

(mentre $P_0 \in \complement B \cap B(P_0, r)$)



per di prendere $\underbrace{1 > t > 1-r}$

$\|P_0 - P_t\| = \|P_0 - tP_0\| = \|(1-t)P_0\| =$

$(1-t)\underbrace{\|P_0\|}_{=1} = 1-t < r$

$\Rightarrow \quad P_0 \in \partial B$

DUNQUE $\boxed{\partial B = S}$

Per la (4) devo fare in modo simile alla (2)

(provare per esercizio)

PER OGGI PUÒ BASTARE