Analisi Matematica II. Lezione 1

Introduzione.

Claudio Saccon[1]

[1]Dipartimento di Matematica, Via F. Buonarroti 1/C,56127 PISA
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
sito web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/
orario di ricevimento: previo appuntamento su Teams

25 settembre 2023

Argomenti del corso

Rispetto al corso di Analisi Uno, in cui l'ambiente era $\mathbb{R}$, si andranno a studiare le proprietà degli **spazi** N**- dimensionali** e le funzioni di **più variabili**.
Gli argomenti si possono suddividere come segue:

- Limiti e continuità in spazi di dimensione $N > 1$.
- Calcolo differenziale per funzioni di più variabili.
- Calcolo integrale per funzioni di più variabili.
- Curve e integrali curvililinei
- Superfici e integrali di superficie.
- Elementi di calcolo differenziale sulle superfici (teoremi di Stokes e della divergenza)

Non è detto che la sequenza sia esattamente quella scritta sopra dato che spesso gli argomenti "si intrecciano"

Materiale didattico e ricevimento

Il 95% di quanto verrà fatto a lezione si può trovare **sulle note scaricabili liberamente** dal sito

http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Sullo stesso sito saranno disponibili i file (pdf+video) di ogni lezione.
Come esercizi consiglio di consultare tutte le prove di esame del corso, disponibili con la correzione, sempre sul sito scritto sopra.
Naturalmente si possono consultare altri testi tra i quali però non mi sento di dare particolari indicazioni.

ricevimento

Il ricevimento è **incoraggiato** e *di norma* si terrà, previo appuntamento, sulla piattaforma Teams. Per appuntamenti e altre richieste potete contattarmi all'indirizzo email

claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it.

Riguardo all'esame

- L'esame prevede uno **scritto** e un **orale** — entrambi obbligatori.
- Ci saranno quattro prove intermedie (compitini) a: metà novembre/ metà marzo / metà aprile / fine maggio. Nel caso in cui la media tra i compitini sia sufficiente, tale media potrà sostituire lo scritto. Non ci saranno vincoli sui voti dei singoli compitini (anche con un compitino mancante si potrà calcolare la media finale — ovviamente la prova mancante varrà zero). Si potrà venire all'orale con il voto dei compitini in un appello qualunque entro la fine di settembre 2024.
- Riguardo agli scritti "normali": è consentito (1) fare l'orale in uno degli appelli successivi allo scritto purché entro la stessa sessione (estiva/invernale); (2) riprovare lo scritto in un appello successivo tenendo presente che la **consegna** annulla il compito precedente. La consegna di un compito non annulla comunque la possibilità di usare i compitini (dunque si può scegliere il voto migliore tra i due).

Ambiente: $\mathbb{R}^N$ $\quad N \geq 1 \quad (N \geq 2)$

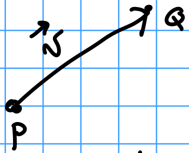
$P \in \mathbb{R}^N \qquad P = (x_1 \ldots x_N)$

↑ componenti di P

Tipicamente $N=2$ / $N=3$

<u>OSS.</u> PUNTI / VETTORI

i vettori sono "delle frecce"

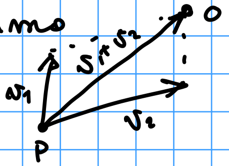


li posso immaginare come coppie ordinate di punti

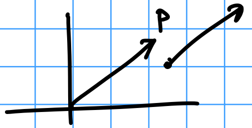
$$\vec{v} = (P, Q) = \boxed{P - Q}$$

Dunque ho senso $\boxed{(1)}$ scrivere la differenza tra due punti $\rightarrow$ vettore

$\boxed{(2)}$ sommare due vettori con la regola del parallelogramma

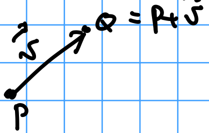


SI VEDE CHE c'è una corrispondenza tra i vettori e punti: dato un vettore, lo applico in $O = (0 \cdot \cdot 0)$ e vedo il punto corrispondente



(3) Sommo un punto P e un vettore $\vec{v}$

$\longrightarrow$ il punto Q



Se vedo i vettori come detto in (2)

Posso associare a ogni vettore $\vec{v} = (v_1 \dots v_N)$
le sue componenti

SI VEDE SUBITO

$$v_1 + v_2 = (v_{1,1} \dots v_{1,N}) + (v_{2,1} \dots v_{2N}) =$$

$$(v_{1,1} + v_{2,1}, \dots, v_{1,N} + v_{2,N})$$

(si sommano le componenti)

$P = (x_1 \dots x_N) \qquad P + \vec{v} = (x_1 + v_1, \dots, x_N + v_N)$

DISTANZA TRA I ~~PUNTI~~ vettori DI $\mathbb{R}^N$

<u>Definiamo</u> Se $P = (x_1, \dots, x_N)$,

la <u>NORMA DI P</u> è il numero

$$\|P\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$$

Dati $P, Q \in \mathbb{R}^N$ la <u>DISTANZA</u> tra P e Q

$Q = (y_1 \dots y_N)$

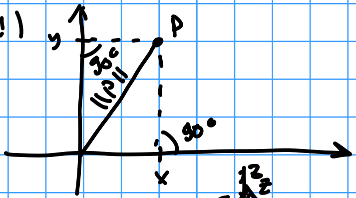
è $d(P, Q) = \|P - Q\|$

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2}$$

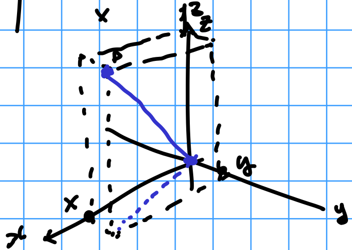
IN $\mathbb{R}^2$ $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

rappresenta la lunghezza (EUCLIDEA..) del segmento tra l'origine $(0,0)$ e (x,y)

(TEOREMA DI PITAGORA!!)



LO STESSO IN $\mathbb{R}^3$



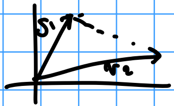
oss. La norma definita sopra ha le seguenti proprietà:

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0$. $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \mathbf{0} = (0 \cdots 0)$

(b) $\|t\vec{v}\| = |t| \, \|\vec{v}\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(c) (disuguaglianza triangolare)

$$\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\| \leq \|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\|$$



(Il vettore $t\vec{v}$ è il vettore $(tv_1, \dots, tv_N)$ e rappresenta $\vec{v}$ allungato di un fattore t)

dim la (c) nel caso $N=2$

$\vec{v}_1 = (x_1, y_1) \qquad \vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ dove

Per vedere che $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{x_2^2+y_2^2}$

$\Longleftrightarrow$ (passo al quadrato)

$$\cancel{x_1^2}+\cancel{x_2^2}-2x_1x_2+\cancel{y_1^2}+\cancel{y_2^2}-2y_1y_2$$

$$= (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \leq \cancel{x_1^2}+\cancel{x_2^2}+\cancel{y_1^2}+\cancel{y_2^2}+ 2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$-x_1x_2-y_1y_2 \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2 y_2}$$

(se il lato sx è <0 la dis. è vera, se no faccio il quadrato)

$$\cancel{x_1^2 x_2^2} + \cancel{y_1^2 y_2^2} + 2 x_1 x_1 y_1 y_2 \le \cancel{x_1^2 x_2^2} + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + \cancel{y_1^2 y_2^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \le x_2^2 y_1^2 - 2 x_1 x_2 y_1 y_2 + x_1^2 y_2^2 \leftarrow \text{è un quadrato!}$$

$$(x_2 y_1 - x_1 y_2)^2$$

IN GENERALE se X è uno spazio vettoriale chiamo <u>norma</u> su X una funzione $n: X \to \mathbb{R}$ (che indico $n(v) = \|v\|$) aventi le prop (a) (b) (c).