Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 71   29/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Calcolo di e^{tA}.

Abbiamo detto che dato A trovo M invertibile e

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix} \quad e \quad J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{i m_G} \end{bmatrix}$$

(ogni $J_1 \dots J_k$ è relativo a un autovalore, $m_G =$ molt. geometrica dell'autovalore)

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{t.c.} \qquad A = M J M^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad e^{tA} = M \, e^{tJ} \, M^{-1}$$

Sappiamo anche che $e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_k} \end{bmatrix}$

e a sua volta $e^{tJ_i} = \begin{bmatrix} e^{tJ_{i1}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_{i m_{G_i}}} \end{bmatrix}$

DUNQUE MI SERVE e^{tJ} se $J = J(\lambda, i) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}}_{i}$

(J blocco di Jordan elementare)

Posso scrivere $J = \lambda I + B_i$ $\qquad B_i = J(0,i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$

$$B_i = \left[0 \,\middle|\, \hat{e}_1 \,\middle|\, \dots \, \hat{e}_{i-1} \right]$$

è chiaro che I e B_i commutano $\Rightarrow e^{t(\lambda I + B_i)} = e^{t\lambda I} \cdot e^{tB_i}$

$$\left(e^{\lambda t} I\right) e^{tB_i} = e^{\lambda t} e^{tB_i} \quad ??$$

$$e^{tB_i} = I + tB_i + \frac{t^2}{2} B_i^2 + \frac{t^3}{6} B_i^3 + \dots + \frac{t^n}{n!} B_i^n + \dots$$

VEDIAMO COME SONO FATTE le potenze di B_i

Ricordiamo che se

$$A = [a_1 | \dots | a_i]$$
$$B = [b_1 | \dots | b_i] \qquad A \cdot B = C$$
$$C = [c_1 | \dots | c_i]$$

allora $c_j = A\, b_j$, Nel caso $B = B_i = [0, \hat{e}_1 \dots \hat{e}_{i-1}]$

$$A \cdot B_i = \left[0 \,\middle|\, a_1 \,\middle|\, a_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_{i-1} \right]$$

Il prodotto (a destra) per B_i, fa "scalare" verso destra le colonne di A – inserendo la colonna nulla all'inizio

Allora

$$B_i^2 = B_i \cdot B_i = \left[0 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \hat{e}_1 \dots \hat{e}_{i-2} \right]$$
$$B_i^3 = B_i^2 \cdot B_i = \left[0 \,|\, 0 \,|\, 0 \,|\, \hat{e}_1 \,|\, \dots \hat{e}_{i-3} \right]$$
$$\vdots$$
$$B_i^i = 0$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad B_i^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \qquad B_i^3 = \begin{bmatrix} 0\,0\,0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ & & 1 \\ & & \ddots & \\ 0\,0\,0 & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow$$

A ogni passo la diagonale con gli 1 si sposta verso l'alto

$$\Rightarrow \quad e^{tB_i} = I + tB_i + \frac{t^2}{2} B_i^2 + \cdots \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} B_i^{i-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & & \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \frac{t^2}{2} \\ & 0 & & & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow e^{tB_i}$$

$$e^{J_i} = e^{\lambda_i} e^{tB_i}$$

QUESTO CONCLUDE IL CALCOLO DI e^{tA}

ESEMPI

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 9 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} x' = -5x + 9y \\ y' = -4x + 7y \\ z' = -2x + 3y + z \end{cases}$$

Cerchiamo $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 9 & 0 \\ -4 & 7-\lambda & 0 \\ -2 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$

$$(1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 9 \\ -4 & 7-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left[(5+\lambda)(\lambda-7) + 36\right] =$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 35 + 36\right) = (1-\lambda)^3 = -(\lambda-1)^3$$

$$(\lambda-1)^2 = (1-\lambda)^2$$

UN UNICO AUTOVALORE $\lambda = 1$ di molteplicità algebrica $m_A = 3$

$$B := A - \lambda I = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

B ha rango 1

(le prime due colonne sono lin. dip)

Ker (B) ha dimensione 2 $m_G = 2$ DOPO PRENDO QUESTA

$$\Rightarrow \quad J = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \left(\text{oppure } J = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \right)$$

È chiaro che $B^2 = 0$ (Ker B^2 ha dim. > 2 cioè 3!!)

A questo punto cerco e_3 tale che ($e_3 \in \text{Ker } B^2 \in \mathbb{R}^3$)

e $e_2 := B e_3 \neq 0$ Per esempio $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\left(e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

e_2 deve essere un autovettore ($Be_2 = B^2 e_3 = 0$). Dato che Ker B ha dimensione 2 esiste $e_1 \in$ Ker B t.c. e_1 e_2 generano Ker B. $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad Be_1 = 0 \iff 6x = 9y$

$2x = 3y$ no condizioni su z $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ z \end{pmatrix}$

voglio e_1 e_2 lin. indip. Per esempio $x = 0$ $z = 1 \rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Riassumendo

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(Be_3 = e_2)$

<u>OSS.</u> Questo esempio mostra che non si può "partire dal basso"

Se cerco e_1 e_2 che generano Ker B <u>NON</u> è detto che trovo e_3 per cui $Be_3 = e_1$ oppure $Be_3 = e_2$. In effetti potrei prendere $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ← Generano Ker B

Vediamo se esiste $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per cui $B e_3 =$ uno dei due

$$\begin{bmatrix} -6 & 9 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x+9y \\ -4x+6y \\ -2x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-6x+9y = 3$ $\boxed{-2x+3y=1}$ (I e II° RIGA)

$-2x+3y=0$ III° RIGA

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stesso discorso nel secondo caso.

DEVO PARTIRE DA e_3 !!

TORNANDO ALL'ESERCIZIO: $M = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Calcoliamo M^{-1} (una volta...)

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \text{Cofattori di } M^t = \frac{1}{9} \text{cof.} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$(\det M = 9)$ $$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{9} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ e_1 & \underbrace{e_2 \quad e_3} & \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = \frac{e^t}{9} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = -5x+9y \\ y' = -4x+7y \\ z' = -2x+3y+z \end{cases} \qquad \begin{aligned} x(0)&=1 \\ y(0)&=-1 \\ z(0)&=0 \end{aligned} \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = e^{tA}\, Y_0 =$$

$$\frac{e^t}{9}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{e^t}{9}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -15 \end{bmatrix} = \frac{e^t}{9}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1-15t \\ -15 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{9}e^t\begin{bmatrix} 9-9\cdot 15\,t \\ 6-6\cdot 15t-15 \\ -3+3-3\cdot 15t \end{bmatrix} = \frac{e^t}{9}\begin{bmatrix} 9-9\cdot 15t \\ -9-6\cdot 15t \\ -3\cdot 15t \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} 1-15t \\ -1-10t \\ -5t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = (1-15t)e^t \qquad y(t) = -(1+10t)e^t \qquad z(t) = -5(t)$$

VERIFICA $\quad x(0)=1 \quad y(0)=-1 \quad z(0)=0 \quad$ TORNA

$$x'(t) = -15e^t + (1-15t)e^t = (-14-15t)e^t$$

$$-5x+9y = (-5-5\cdot 15t)e^t - (9+9\cdot 10t)e^t = e^t(\underbrace{-5-9}_{-14}-15t)e^t$$

TORNA

le altre due non le controllo...

ALTRO ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = \det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$-\lambda\,(1+\lambda)(2+\lambda)-(-1+2+\lambda)=$

$-\lambda(1+\lambda)(2+\lambda)-(1+\lambda) = (1+\lambda)\left[-2\lambda-\lambda^2-1\right]$

$-(1+\lambda)^3$ UN AUTOVETTORE $\lambda=-1$ con $m_A=3$

$$B = A+I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ ha rango 2 Ker B ha dim 1

$\Rightarrow B^2 \neq 0 \qquad B^3 = 0$

Dovrei partire da e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$ e definire $e_2 = Be_3$ $e_1 = B^2 e_3$

IN <u>QUESTO CASO</u> si può partire da e_1 !

cerco $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} B$ $\qquad z=0 \qquad x=y$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cerco $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $Be_2 = e_1$ $\begin{cases} -z = 1 \\ x-y = 1 \\ x-y+z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = -1 \\ x-y = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ cerco $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $Be_3 = e_2$ $\begin{cases} -z = 1 \\ x-y = 0 \\ x-y+z = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} z = -1 \\ x = y \\ x = y \end{cases}$

$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

L'altro giro : (questo e' sempre giusto!)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B^2$$

ORA POTREI PRENDERE $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

IL CASO NON OMOGENEO.

$$\begin{cases} Y' = AY + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

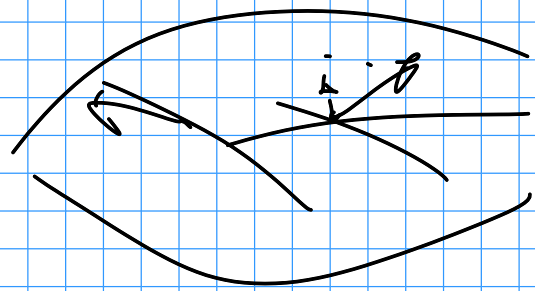
Allora $Y(t)$ è data dalla formula:

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}\left\{ Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-\tau)A} B(\tau)\, d\tau \right\}$$

VEDIAMO SE TORNA

$$Y(t_0) = e^{0A}\left\{ Y_0 + \int_{t_0}^{t_0} \sim \right\} = Y_0$$

$$Y'(t) = \overbrace{A e^{(t-t_0)A}\left\{ Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-\tau)A} B(\tau)\, d\tau \right\}}^{Y(t)} + \underbrace{e^{(t-t_0)A}\, e^{(t_0-t)A}}_{I} B(t) = AY(t) + B(t)$$



$$A \to \begin{bmatrix} -5 & 9 & 0 \\ -4 & 7 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$