Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 70   24/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

Per capire il procedimento descritto ieri

- Immaginate di avere A 20×20
- I calcoli mi dicono che ci sono 2 autovalori λ_1 di molt. algebrica $m_1 = 13$ e λ_2 di molteplicità algebrica $m_2 = 7$
- Faccio i conti per λ_1: prendo $B_1 = A - \lambda_1 I$ e trovo le dimensioni dei nuclei di B_1^n $n = 0, 1 \dots$. Chiamo $\mu_i = \dim \operatorname{Ker} B_1^i$

$$\mu_0 = 0, \ \underset{m_G(\lambda_1) = 4}{\mu_1 = 4}, \ \mu_2 = 8, \ \mu_3 = 10, \ \mu_4 = 12, \ \underset{h=5}{\mu_5 = 13}, \ \mu_n = 13 \ \forall n \geq 5$$

$\operatorname{Ker} B^n = \operatorname{Ker} B^5$ $\forall n \geq 5$ $\quad$ ($\operatorname{Ker} B^h$ = autospazio generalizzato di λ_1)

dunque $\nu_1 = 4$, $\nu_2 = 4$, $\nu_3 = 2$, $\nu_4 = 2$, $\nu_5 = 1$

Questi numeri corrispondono a un diagramma come segue.

$$
\begin{array}{cccc}
e_1^5 & & & \\
\downarrow B & & & \\
e_1^4 & e_2^4 & & \\
\downarrow B & \downarrow & & \\
e_1^3 & e_2^3 & & \\
\downarrow B & \downarrow & & \\
e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_4^2 \\
\downarrow B & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 & e_4^1 \\
\downarrow B & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

gli e_i sono autoVETTORI generalizzati. Quelle delle riga in basso sono AUTOVETTORI veri

$\Rightarrow$ TROVO 4 Blocchi di Jordan elementari

$$
1\times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & 1 & \\ & 0 & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & \lambda_1 \end{bmatrix}
\qquad
1\times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \lambda_1 & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix}
\qquad
2\times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}
$$

e la matrice $M = [M_1 | M_2]$

$$M_1 = \left[e_1^1 \,|\, e_1^2 \,|\, e_1^3 \,|\, e_1^4 \,|\, e_1^5 \,|\, e_2^1 \,|\, e_2^2 \,|\, e_2^3 \,|\, e_2^4 \,|\, e_3^1 \,|\, e_3^2 \,|\, e_4^1 \,|\, e_4^2 \right]$$

Per quanto riguarda λ_2 stesso discorso. Supponiamo che venga

$$\mu_0 = 0 \quad \mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 4 \quad \mu_3 = 5, \quad \mu_4 = 6, \quad \mu_5 = 7$$

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 2, \quad \nu_3 = 1, \quad \nu_4 = 1, \quad \nu_5 = 1$$

$$
\begin{array}{cc}
e_1^5 & \\
\downarrow & \\
e_1^4 & \\
\downarrow & \\
e_1^3 & \\
\downarrow & \\
e_1^2 & e_2^2 \\
\downarrow & \downarrow \\
e_1^1 & e_2^1
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ 2 blocchi di J elementari.

$B(\lambda_2, 5) \qquad B(\lambda_2, 2)$

$$M_2 = \left[e_1^1 \,|\, e_2^1 \,|\, e_3^1 \,|\, e_4^1 \,|\, e_5^1 \,|\, e_2^1 \,|\, e_2^2 \right]$$

ESEMPIO CONCRETO

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$P(\lambda) = \det\left(A - \lambda I\right) \Rightarrow = \overset{\text{CALCOLI}}{- \; - \; -} \Rightarrow$ TROVO $\lambda_1 = 1 \quad m_A = 1$

$\lambda_2 = -1 \quad m_A = 2$

TROVO UN AUTOVETTORE PER λ_1 cioè un $e_1 \neq 0$ t.c.

$$(A - \overset{\lambda_1 = 1}{I})e_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 5x - 5y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad I^\circ - III^\circ$$

$\boxed{z = 0, \; x = y}$ $\qquad e_1 = \underset{\text{(per esempio)}}{} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e non c'è altro da fare riguardo λ_1

$\lambda_2 = -1 \qquad B = A \overset{-\lambda_2}{+} I$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ HA RANGO 2 $\quad \dim(\ker B) = 1$

$m_G = 1$

$\det = -5 + 3 \neq 0$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\ker B^2$ ha dim $2 = m_A \Rightarrow B^n$ ha lo stesso ker $\forall n \geq 2$

A questo punto cerco $e_3 \in \operatorname{Ker} B^2 \setminus \operatorname{Ker} B$

$e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ deve essere $2x - y + z = 0$ $\quad y = 2x + z$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2x+z \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Provo con $z = 0 \Rightarrow B \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$

Quindi va bene $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} =: e_2$

e_2 deve essere autovettore! Proviamo.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ TORNA

IN DEFINITIVA SE PRENDO

$$M = \left[e_1 \mid e_2 \mid e_3 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow A = M J M^{-1}$$

Supponiamo di avere il sistema di eq. diff

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2z \\ y' = 5x - 4y + 3z \\ z' = x - y \\ x(0) = 1 \quad y(0) = 2 \quad z(0) = 0 \end{cases}$$

$Y' = AY$ dove $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$Y(0) = e_3$

Sappiamo dalla teoria che

$$Y(t) = e^{tA} Y_0$$

Devo calcolare e^{tA}. Sempre dalla teoria ho

$$e^{tA} = e^{tMJM^{-1}} = M e^{tJ} M^{-1}$$

DUNQUE DEVO CALCOLARE e^{tJ}. Noto che $J = D + C$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e si vede che $DC = CD$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \\ & D_2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 & \\ & C_2 \end{bmatrix}$$

D_1 commuta con C_1

D_2 commuta con C_2

$$e^{tJ} = e^{tD} e^{tC}$$

$D = \text{Diag}(1, -1, -1)$

$$e^{tD} = \text{Diag}(e^{t}, e^{-t}, e^{-t})$$

Rimane da calcolare e^{tC}

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tC} = I + tC + \frac{t^2 C^2}{2} + \frac{t^3}{6} C^3 + \dots$$

MA $C^2 = 0$ (SI VEDE)

$$= I + tC$$

DUNQUE

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} = e^{tJ}$$

$$e^{tA} = M \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} M^{-1}$$

$$e^{tA} Y_0 = e^{tA} e_3 = M e^{tJ} M^{-1} e_3 = \otimes \qquad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Noto che $M = [e_1 | e_2 | e_3] \Rightarrow M \hat{e}_3 = e_3 \iff M^{-1} e_3 = \hat{e}_3$

(trucco ..)

$$\otimes = M e^{tJ} \hat{e}_3 = M \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ t e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t} M \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} \left(t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2-t \\ -t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{-t}$$
$$y(t) = e^{-t}(2-t)$$
$$z(t) = -t e^{-t}$$

FATTO (LE VEDREMO)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \Big\} n \qquad C^0 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad C^1 = C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \leftarrow n-1$$

$$= C^i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & \ddots & & 1 \\ 0 & & \ddots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow n-i$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \qquad C^0 = I \qquad C^1 = C \qquad C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^3 = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & & \\ & & 0 \end{bmatrix} \qquad C^4 = 0 \qquad C^n = 0 \quad n \geq 4$$

$$e^{tC} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & t & \ddots & & \frac{t^2}{2} \\ & & \ddots & & & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & & t \\ & & & & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

(NE PARLIAMO LUNEDÌ)