

Claudio Saccon (*)

Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 70 24/05/2023

email: claudio.sacson@CHIOCCIOLA.unipi.it

web: <http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/>

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

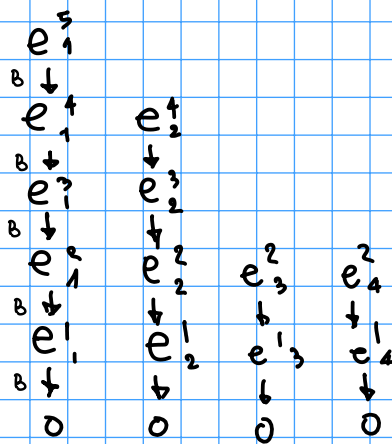
Per capire il procedimento descritto:

- Immaginate di avere A 20×20
- I calcoli mi danno che ci sono 2 autovalori λ_1 di mult. algebrico $m_1 = 13$ e λ_2 di molteplicità algebrica $m_2 = 7$
- Faccio i casi per λ_1 : prendo $B_1 = A - \lambda_1 I$ e trovo le dimensioni dei nuclei di B_1^n $n = 0, 1, \dots$. Chiamo $\mu_n = \dim \text{Ker } B_1^n$

$$\mu_0 = 0, \mu_1 = 4, \mu_2 = 8, \mu_3 = 10, \mu_4 = 12, \mu_5 = 13, \mu_n = 13 \quad \forall n \geq 5$$

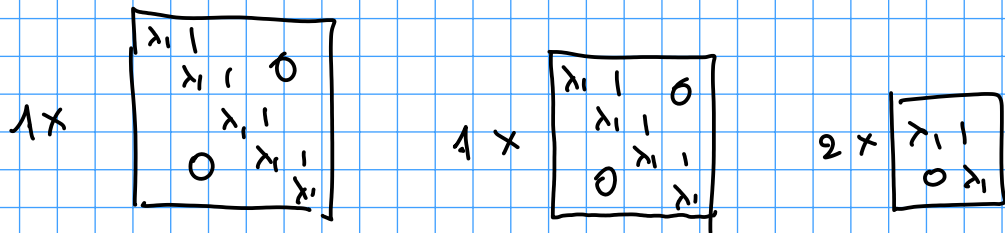
$$\text{Ker } B_1^n = \text{Ker } B_1^5 \quad \forall n \geq 5 \quad (\text{Ker } B_1^5 = \text{autospazio generale di } \lambda_1)$$

dunque $v_1 = 4, v_2 = 4, v_3 = 2, v_4 = 2, v_5 = 1$
Questi numeri corrispondono a un diagramma come segue.



gli e_i sono autovettori generalizzati. Quelli delle righe in basso sono AUTOVETTORI veri

⇒ Trovo 4 Blocchi di Jordan e loro



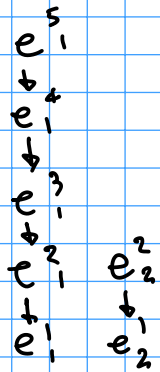
e lo matrice $M = [M_1 | M_2]$

$$M_1 = [e_1^1 | e_1^2 | e_1^3 | e_1^4 | e_1^5 | e_2^1 | e_2^2 | e_2^3 | e_2^4 | e_3^1 | e_3^2 | e_4^1 | e_4^2]$$

Per quanto riguarda λ_2 oltre discusso. Supponiamo che venga

$$\mu_0 = 0, \mu_1 = 2, \mu_2 = 4, \mu_3 = 5, \mu_4 = 6, \mu_5 = 7$$

$$v_1 = 2, v_2 = 2, v_3 = 1, v_4 = 1, v_5 = 1$$



⇒ 2 blocchi di J oltre.

$B(\lambda_2, 3)$ $B(\lambda_2, 2)$

$$M_2 = [e_1^1 | e_1^2 | e_1^3 | e_1^4 | e_1^5 | e_2^1 | e_2^2]$$

ESEMPIO CONCRETO

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Rightarrow = \text{CALCOLI} \Rightarrow \text{TROVO } \lambda_1 = 1 \quad m_A = 1$$

$$\lambda_2 = -1 \quad m_A = 2$$

TROVO UN AUTOVETTORE PER λ_1 cioè un $e_1 \neq 0$ t.c.

$$(A - I) e_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 5x - 5y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \\ z = 0 \quad \text{I} \cdot \text{III} \end{cases}$$

$$\boxed{z=0, x=y}$$

$e_1 =$
(per esempio)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e non c'è altro da fare riguardo λ_1

$$\lambda_2 = -1 \quad B = A + I$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

HA RANGO 2

$$\dim(\text{Ker } B) = 1$$

$$m_C = 1$$

$$\det = -5 + 3 \neq 0$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Ker } B^2$ ha $\dim 2 = m_A \Rightarrow B^m$ ha 2 classi $\text{Ker } B^m \Rightarrow 2$

A questo punto c'è $e_3 \in \text{Ker } B^2 \setminus \text{Ker } B$

$$e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{dove vale} \quad 2x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad \eta = 2x + z$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2x+z \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Puro con } z=0 \Rightarrow B \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\text{Quindi: no bene } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} =: e_2$$

e_2 deve essere autovettore: proprio.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{TOPNA}$$

IN DEFINITIVA SE PRENDO

$$M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = M J M^{-1}$$

Supponiamo di avere il sistema di eq. diff

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2z \\ y' = 5x - 4y + 3z \\ z' = x - y \\ x(0) = 1 \quad y(0) = 2 \quad z(0) = 0 \end{cases} \quad Y' = AY \quad \text{dove } Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad Y(0) = e_3$$

Sopprimiamo dalla teoria che

$$Y(t) = e^{tA} Y_0$$

Devo calcolare e^{tA} . Sappiamo dalla teoria che

$$e^{tA} = e^{tMJM^{-1}} = M e^{tJ} M^{-1}$$

DUNQUE DEVO CALCOLARE e^{tJ} . Nota che $J = D + C$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e si vede che $DC = CD$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

D_1 commuta con C_1

D_2 commuta con C_2

$$e^{tJ} = e^{tD} e^{tC}$$

$$D = \text{Diag}(1, -1, -1)$$

$$e^{tD} = \text{Diag}(e^t, e^{-t}, e^{-t})$$

Rimane da calcolare e^{tC}

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tC} = I + tC + \frac{t^2}{2} C^2 + \frac{t^3}{6} C^3 + \dots \quad \text{MA } C^2 = 0 \text{ (si vede)}$$

$$= I + tC$$

$$\text{DUNQUE } e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} = e^{tJ}$$

$$e^{tA} = M \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} M^{-1}$$

$$e^{tA} y_0 = e^{tA} e_3 = M e^{tJ} M^{-1} e_3 = \textcircled{X} \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota che $M = [e_1 | e_2 | e_3] \Rightarrow M \hat{e}_3 = e_3 \Leftrightarrow M^{-1} e_3 = \hat{e}_3$

(+tracce...)

$$\textcircled{X} = M e^{tJ} \hat{e}_3 = M \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t e^t \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$M \begin{bmatrix} 0 \\ t e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t} M \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} \left(t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2-t \\ -t \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} \\ y(t) &= e^{-t} (2-t) \\ z(t) &= -t e^{-t} \end{aligned}$$

FATTO (LE VEDREMO)

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}_n$$

$$C^0 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad C^1 = C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}_{\leftarrow n-1}$$

$$= C^i = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{\leftarrow n-i}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^0 = I \quad C^1 = C$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^4 = 0 \quad C^n = 0 \quad n \geq 4$$

$$e^{tC} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ & & & 1 & \dots & \frac{t^{n-4}}{(n-4)!} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(NE PARLIAMO LUNEDI)







