Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 69 23/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

DOMANI Me 24/5 ore 17.00
RICEVIMENTO SU TEAMS

PROBLEMA DI CALCOLARE e^A dove A è una matrice N×N

⇝ RICONDURSI A UNA FORMA PARTICOLARE DI A (facendo un cambio di base) ⇝ $\boxed{\text{FORMA DI JORDAN}}$

Ci servono un po' di discorsi di algebra lineare –
TUTTO CIÒ CHE SEGUE È FATTO IN $\mathbb{R}$, nell'ipotesi che A abbia solo autovalori reali. PERÒ GLI STESSI RISULTATI VALGONO IN $\mathbb{C}$ (pur di ammettere che i "numeri" siano complessi).

PARTO DA A N×N. • IL POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda I) \quad \text{è un polinomio di grado } N.$$

- Le radici di P, cioè i λ per cui $P(\lambda)=0$ sono gli <u>autovalori</u> di A e cioè quei numeri per cui

$$\operatorname{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\ e \in \mathbb{R}^N \quad e \neq 0 \quad \text{per cui} \quad Ae=\lambda e$$

- Dato $\hat{\lambda}$ autovalore definisco

la molteplicità <u>algebrica</u> $m_A(\hat{\lambda}) = \hat{m}$ dove

$$P(\lambda) = (\lambda-\hat{\lambda})^{\hat{m}}\, Q(\lambda) \qquad \text{dove} \quad Q(\hat{\lambda}) \neq 0$$

Detto altrimenti: so che (per il teorema dell'algebra) ci sono $\lambda_1 \ldots \lambda_K$ autovalori (li sto supponendo reali) e $m_1 \ldots m_K$ numeri interi con $m_1 + \ldots + m_K = N$ tali che $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_K)^{m_K} (-1)^N$

I numeri m_i sono la molteplicità algebrica dei λ_i (cioè la molteplicità delle radici λ_i del polinomio P)

- definisco anche la <u>molteplicità geometrica</u>

$$m_G(\hat{\lambda}) = \dim \operatorname{Ker}(A-\hat{\lambda} I)$$

$m_G(\hat{\lambda})$ = massimo numero di autovettori linearmente indipendenti (per $\hat{\lambda}$)

SI HA $\qquad m_G(\hat{\lambda}) \leq m_A(\hat{\lambda})$

<u>OSS.</u> Se $\quad m_G(\lambda_i) = m_A(\lambda_i) \quad \forall i = 1 \ldots K$

$\Rightarrow$ esiste una base di $\mathbb{R}^N$ fatta da autovettori

$$\underbrace{e_{1,1} \ldots e_{1,m_1}}_{m_1},\ \underbrace{e_{2,1} \ldots e_{2,m_2}}_{m_2},\ \ldots,\ \underbrace{e_{K,1} \ldots e_{K,m_K}}_{m_K} \quad \leftarrow \text{BASE DI } \mathbb{R}^N \text{ (IN TUTTO } N)$$

IN QUESTA BASE A si trasforma in $\underbrace{Diag(\overbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}^{m_1}, \overbrace{\lambda_2 \dots \lambda_2}^{m_2}, \dots, \overbrace{\lambda_k \dots \lambda_k}^{m_k})}_{D}$

$$D = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix} & & C \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}} & \\ 0 & & \begin{matrix} \lambda_k & \\ & \lambda_k \end{matrix} \end{bmatrix}$$

DUNQUE A è diagonalizzabile

$$A = M D M^{-1}$$

$$M = \left[e_{11} \middle| \quad \middle| e_{1,m_1} \middle| \dots \right]$$

QUESTO E' IL CASO FORTUNATO. IN GENERALE può capitare che $m_G(\hat{\lambda}) < m_A(\hat{\lambda})$

SUPPONIAMO DI AVERE $\lambda_1 \dots \lambda_k$ gli autovalori (distinti) di A e $m_1 \dots m_k$ le molteplicità algebriche corrispondenti $(k \leq N \quad m_1 + \dots + m_k = N)$

Prendo uno di questi λ_i - lo chiamo $\hat{\lambda}$ e $m_A := m_i$

(quello che faccio ora va ripetuto per ogni i)

Definisco $B := A - \hat{\lambda} I$. So che $\operatorname{Ker} B \neq \{0\}$

So anche che $m_G = m_G(\hat{\lambda}) = \dim B$

Facciamo le potenze di B:

$$I = B^0, \quad B^1 = B, \quad B^2, \quad B^3, \quad B^2 \dots \quad B^h \dots$$

OSSERVIAMO CHE $\operatorname{Ker} B^i \supset \operatorname{Ker} B^{i-1}$

Infatti se $u \in \operatorname{Ker} B^{i-1} \Rightarrow B^{i-1} u = 0 \Rightarrow B(B^{i-1} u) = 0, \ B^i u = 0$

dunque $\{0\} = \operatorname{Ker} B^0 \subset \operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} B^2 \subset \dots \subset \operatorname{Ker} B^h \subset \dots$

FATTO Esiste un intero h tale che

se $i \leq h$ $\quad \operatorname{Ker} B^{i-1} \neq \operatorname{Ker} B^{i}$, $\quad \operatorname{Ker} B^{h} = \operatorname{Ker} B^{r} \quad \forall r \geq h+1$

e $\operatorname{Ker} B^{h}$ ha dimensione $m_A(\hat{\lambda})$

$$\underbrace{\{0\} \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} B \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} B^2 \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} B^3 \subset \cdots \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker} B^{h} = \operatorname{Ker} B^{h+1} = \cdots}$$

NOTIAMO che $1 \leq h \leq m_A(\hat{\lambda})$. I casi $h = 1$ e $h = m_A(\hat{\lambda})$ diamo "i casi estremi".

$h = 1 \longrightarrow \operatorname{Ker}(B)$ ha dim m_A (caso fortunato)

$h = m_A$ corrisponde a dire che $\dim \operatorname{Ker} B^{i+1} = \dim \operatorname{Ker} B^{i} + 1$ (a ogni passo la dimensione cresce di 1 - dunque devo fare m_A passi)

Chiamiamo $\mu_i := \dim \operatorname{Ker} B^{i}$ quindi

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_h = \mu_{h+1} = \cdots$$

(μ_i è crescente fino ad h poi diventa costante)

FATTO se $\nu_i = \mu_i - \mu_{i-1}$ $\quad i \geq 1 \implies 0 \leq \nu_{i+1} \leq \nu_i$

$$\nu_1 = \mu_1 \qquad \nu_2 = \mu_2 - \mu_1 \qquad \nu_3 = \mu_3 - \mu_2$$

$$(\ \mu_i = \nu_1 + \cdots \nu_i\ )$$

Def. chiamo BLOCCO DI JORDAN "ELEMENTARE"

$$J(\hat{\lambda}, r) = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\lambda} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \hat{\lambda} \end{bmatrix}}_{r} \Big\} r = \hat{\lambda} I_r + B_r$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$J(\lambda,4)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

TEOREMA (FORMA DI JORDAN) Sia data A $n\times n$ e siano $\lambda_1 - \lambda_k$ gli autovalori distinti.

Per ogni λ_i esistono $m_G(\lambda_i)$ blocchi elementari $J(\lambda_i, r_1) \dots J(\lambda_i, r_{m_G})$ di modo che, con un opportuno cambio di base M si ha

$$A = M J M^{-1}$$ dove

BLOCCO DI JORDAN "COMPOSITO" relativo a $\lambda_1 - \lambda_k$

$$J=\begin{bmatrix}\boxed{J_1} & & 0\\ & \boxed{J_2} & \\ 0 & & \boxed{J_k}\end{bmatrix}$$

e ogni J_i ha la seguente struttura

$$J_i = J(\lambda_i) = \begin{bmatrix}\boxed{J(\lambda_i, r_1)} & & \\ & \boxed{J(\lambda_i, r_2)} & \\ & & \boxed{J(\lambda_i, r_{m_G})}\end{bmatrix}$$

$r_1 \dots r_{m_G}$ da capire

$r_1 + \dots r_{m_G} = m_A$

$m_G(\lambda_i)$

(se $r_i = 1$ $J(\lambda, 1)$ $[\lambda]$)

COME TROVO QUESTI r_i ??

IL PROCEDIMENTO È IL SEGUENTE.

Prendo $\hat{\lambda} = \lambda_i$, FACCIO le potenze DI $B = A - \hat{\lambda} I$

$B \quad B^2 \quad B^3$

TROVO h per cui i nuclei si stabilizzano $(\dots \dim \ker B^h = m_A(\lambda_i))$

• So che $\ker B^{k-1} \subsetneq \ker B^{k}$ DUNQUE POSSO TROVARE

$\dim = \mu_{k-1}$ $\qquad$ $\dim \mu_k = m_A(\hat{\lambda})$

$\nu_k = \mu_k - \mu_{k-1}$ vettori linearmente indipendenti $e_1^k \dots e_{\nu_k}^k$

$$\simeq \quad \underbrace{\ker B^k = \ker B^{k-1} \oplus \operatorname{span}(e_1 \dots e_{\nu_k})}$$

Noto che se prendo uno di questi e_i $(i = 1 \dots \nu_k)$ e ci applico B trovo dei vettori in $\ker B^{k-1}$. Potrebbe essere che $\ker B^{k-1} = \operatorname{span}(Be_1 \dots Be_{\nu_k})$ oppure no

$$\begin{array}{l|lllll}
k & e_1^k & e_2^k & e_{\nu_k}^k & & \\
 & \downarrow B & \downarrow B & \downarrow B & & \\
 & Be_1 & Be_2 & Be_{\nu_k} & & \\
k-1 & e_1^{k-1} & e_2^{k-1} & e_{\nu_k}^{k-1} & e_{\nu_k+1}^{k-1} \dots & e_{\nu_{k-1}}^{k-1}
\end{array}$$

in generale ci saranno altri vettori $e^{k-1}_{\nu_k+1} \dots e^{k-1}_{\nu_{k-1}}$)

Continuo in questo modo e costruisco il seguente diagramma:

$$\begin{array}{llllll}
k & e_1^k \dots & e_{\nu_k}^k & & & \leftarrow \operatorname{span}(e_i^k) \oplus \ker B^{k-1} = \ker B^k \\
 & \downarrow B & \downarrow B & & & \\
k-1 & e_1^{k-1} & e_{\nu_k}^{k-1} & e_{\nu_k+1}^{k-1} \dots e_{\nu_{k-1}}^{k-1} & & \leftarrow \operatorname{span}(e_i^{k-1}) \oplus \ker B^{k-2} = \ker B^{k-1} \\
k-2 & \downarrow B & \downarrow B & \downarrow B & & \\
 & e_1^{k-2} & & & e_{\nu_{k-1}+1}^{k-2} \dots e_{\nu_{k-2}}^{k-2} & \\
k=1 & e_1^1 & & & & e_{\nu_1}^1
\end{array}$$

autovettori generalizzati

$\nu_1 = m_G$ $\qquad$ NELLA RIGA IN BASSO ho m_G autovettori

IN TUTTO CI SONO m_A vettori e ci sono m_G "sequenze" (le colonne del diagramma)

OGNI COLONNA DEL DIAGRAMMA mi dà una sequenza di r vettori $e_r \xrightarrow{B} e_{r-1} \xrightarrow{B} e_{r-2} \to \dots \xrightarrow{B} e_1$

a cui corrisponde un BLOCCO $J(\hat{\lambda}, r)$ e un "PEZZO DI MATRICE"

$$\left.\underbrace{\left[\, e_1 \,|\, e_2 \,|\, \dots \,|\, e_r \,\right]}_{r}\right\} N$$

FACENDO QUESTO PROCEDIMENTO PER OGNI $i = 1 \dots k$

TROVO le m_G sequenze trovate sopra per $\hat{\lambda} = \lambda_i$

$$M = \Big[\underbrace{\ \big|\ \big|\ \big|\ }_{i=1} \ \big| \ \underbrace{\qquad\quad}_{i=2} \ \big| \qquad\qquad \Big]$$

QUESTA M è la matrice del cambio di base e la corrispondente J è quella di prima dove gli r_i sono le lunghezze delle sequenze dette sopra

---

CONSIDERIAMO IL CASO $N = 3$ e vediamo cosa può succedere

A 3×3 $\qquad p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \leftarrow$ pol. di terzo grado

(1) tre radici distinte $\Longleftrightarrow$ tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ DISTINTI

⇒ ci sono tre autovettori e_1 e_2 e_3 lin. ind.

Chiamo $M = [e_1 | e_2 | e_3]$ $\quad J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

⇒ $A = MJM^{-1}$ (A DIAGONALIZZABILE)

(i blocchi $J_i = [\lambda_i] = J(\lambda_i, 1)$)

(2) P ha due radici distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\quad m_A(\lambda_2) = 2$ $\quad m_A(\lambda_1) = 1$

- TROVO e_1^1 autovettore per λ_1 $\quad e_1^1$ genera $\ker(A - \lambda_1 I)$
- DUE POSSIBILITÀ: $m_G(\lambda_2) = 2$ / $m_G(\lambda_2) = 1$

(2A) ci sono e_1^2 e_2^2 autovettori indipendenti ⇒

$M = [e_1^1 | e_1^2 | e_2^2]$ $\quad J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{bmatrix}$ ⇒ $A = MJM^{-1}$

(ANCORA DIAGONALIZZABILE!)

(2B) $\ker(A - \lambda_2 I)$ ha dimensione 1 ⇒ trovo un solo autovettore (a meno di multipli)

ALLORA $\ker(\overbrace{A - \lambda_2 I}^{B})^2$ ha dimensione $2 = m_A(\lambda_2)$

(e poi $\ker(A - \lambda_2 I)^n = \ker(A - \lambda_2 I)^2$ $\forall n \geq 2$)

ALLORA TROVO UN VETTORE e_2^2 con $(A - \lambda_2 I)^2 e_2^2 = 0$ ma $(A - \lambda_2 I) e_2^2 \neq 0$. Chiamo $e_1^2 = B e_2^2$ $\quad e_1^2 \in \ker B$ (è un autovettore)

Prendo $M = [e_1^1, e_1^2, e_2^2]$ $\quad J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ $\quad A = MJM^{-1}$

③ un solo autovalore λ, $m_A = 3$

(3A) $m_G = 3 \to$ trovo $e_1\ e_2\ e_3$ autovettori ind.

$$M = [e_1|e_2|e_3] \qquad J = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_1\end{bmatrix} \qquad A = M J M^{-1}$$

$$(= M \lambda I M^{-1} = \lambda M I M^{-1} = \lambda I)$$

(3B) $m_G = 2$ (QUI E' "IMPORTANTE PARTIRE DA SOPRA")

So che $(B = A - \lambda I)$ $\quad$ Ker B dim 2

Ker B^2 dim 3 $\quad$ (Ker $B^2 = \mathbb{R}^3$)

$(B^2 = 0$ perché $N=3)$

Cerco $e_3 \in \mathbb{R}^3 \, (= \text{Ker}\, B^2)$ tale che $Be_3 \neq 0$. Chiamo

$e_2 = Be_3$ $\quad$ e_2 è un autovettore.

$(e_2 \neq 0,\ Be_2 = BBe_3 = B^2 e_3 = 0)$

$e_3 \to e_2 \to e_1$

Cerco e_1 nel Ker B indipendente da e_2

DUNQUE HO $\quad M = [e_1|e_2|e_3] \qquad J = \left[\begin{array}{c|cc}\lambda & 0 & 0\\ \hline 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{array}\right]$

oppure

$$M = [e_2, e_3, e_1] \qquad J = \begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

(3C) $m_G(\lambda) = 1$ so che

$$\dim(\text{Ker}\, B) = 1 \Rightarrow \dim(\text{Ker}\, B^2) = 2, \quad \dim(\text{Ker}\, B^3) = 3$$

$(B^3 = 0$ perché $N = 3)$.

Allora prendo e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$ ($B^3 e_3 = 0$ = ma è ovvio)

e definisco $\quad e_2 = Be_3 \quad e_1 = Be_2 = B^2 e_3$

Allora $M = \left[e_1 \mid e_2 \mid e_3 \right]$ e $\tilde{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$