Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 68 22/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo $A : I \to$ matrici $N \times N$ $B : I \to \mathbb{R}^N$ continue

$t_0 \in I$, $Y_0 \in \mathbb{R}^N$

$$(P) \begin{cases} (E.L.) & Y' = A(t)Y + B(t) \\ (C.I.) & Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

VISTO che per ogni (t_0, Y_0) esiste unica la soluzione $Y : I \to \mathbb{R}^N$

STRUTTURA DELLE SOLUZIONI.

DICO CHE L'EQ. è omogenea se $B = 0$

$$(E.L.O) \quad Y' = A(t)\, Y$$

Prop. Valgono i seguenti fatti:

(a) Date due soluzioni Y_1 e Y_2 di $(E.L) \Rightarrow$
$Y_2 - Y_1$ è soluzione di $(E.L.O)$

(b) Se Y è sol. di $(E.L)$ e Y_0 è sol. di $(E.L.O) \Rightarrow$
$Y + Y_0$ è sol. di $(E.L)$

(FACILE - LA SALTIAMO)

TEOREMA

L'insieme S_0 delle soluzioni dell'eq. omogenea (E.L.O) è uno spazio lineare di dimensione N.

QUESTO SIGNIFICA CHE:

esistono $Y_1 \dots Y_N$ soluzioni di (E.L.O) tali che

(i) sono linearmente indipendenti: se $c_1 \dots c_N \in \mathbb{R}$ e $c_1 Y(t) + \dots + c_N Y_N(t) = 0 \quad \forall t \in I$ allora $c_1 = \dots = c_N = 0$

(ii) $Y_1 \dots Y_N$ generano S_0: se Y è una soluzione di (E.L.O) $\Rightarrow \exists\, c_1 \dots c_N \in \mathbb{R}$ tali che $Y(t) = c_1 Y_1(t) + \dots + c_N Y_N(t) \quad \forall t$

Dim. Che S_0 sia uno spazio lineare si vede facilmente (come nella (a) della prop. precedente). Vediamo che $\dim(S_0) = N$

Prendiamo $\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N$ i versori di $\mathbb{R}^N$ e definiamo $Y_1 \dots Y_N$ come le soluzioni di (E L.O) con la condizione iniziale $\boxed{Y_i(t_0) = \hat{e}_i}$ (dove $t_0 \in I$ - a caso..)

(esistono per il teorema di Cauchy e per quanto detto all'ultimo)

Dimostro (i) Se $c_1 Y(t) + \dots + c_N Y(t) = 0 \quad \forall t$, in particolare

$0 = c_1 Y_1(t_0) + \dots c_N Y_N(t_0) = c_1 \hat{e}_1 + \dots + c_N \hat{e}_N$.

Dato che gli $\hat{e}_i$ sono lin. ind. in $\mathbb{R}^N \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i$ #

Dimostro (ii) Sia $Y(t)$ una soluzione di (E.L.O)

Dato che $Y(t_0) \in \mathbb{R}^N$ posso scrivere $Y(t_0) = c_1 \hat{e}_1 + \dots + c_N \hat{e}_N$

Prendiamo $\overline{Y}(t) = c_1 Y_1(t) + \dots + c_N Y_N(t) - Y(t)$, ALLORA

- $\overline{Y}$ verifica l'equazione
- $\overline{Y}(t_0) = 0$

$\Big\} \xRightarrow{\text{(UNICITÀ)}} \overline{Y}(t) = 0 \quad \forall t$

cioè $Y(t) = c_1 Y_1(t) + \dots + c_N Y_N(t)$ #

TEOREMA Supponiamo che $\bar{Y}$ sia una soluzione di (E.L)

Allora

$$Y \text{ è sol. di (E.L.)} \iff \exists\, Y_0 \text{ sol. di (E.L.0) con } Y = Y_0 + \bar{Y}$$

(Y_0 è unico, data Y!)

Dim. ($\Rightarrow$) prendo $Y_0 = Y - \bar{Y}$ e vedo che torna

($\Leftarrow$) se Y_0 risolve (E.L.0) e $\bar{Y}$ risolve (E.L) $\Rightarrow$

$Y_0 + Y$ risolve (E.L.)

DUNQUE PER TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI (E.L)

BASTA (E BISOGNA..) TROVARE

- N soluzioni indipendenti di (E.L.0) $\quad Y_1 .. Y_N$
- 1 soluzione (particolare) di (E.L) $\quad \bar{Y}$

dopo di che le soluzioni di (E.L) sono tutte e sole date da

$$Y = \bar{Y} + c_1 Y_1 + \dots + c_N Y_N \qquad c_1, \dots c_N \in \mathbb{R}$$

Purtroppo non abbiamo un modo di trovare $Y_1 .. Y_N$ in generale

(se $A = A(t)$) eccetto che nel caso $N = 1$

[Ricordo che la sol di

$$\begin{cases} y' = a(t)\, y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è data dalla formula

$$y(t) = e^{A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)}\, b(\tau)\, d\tau \right)$$

dove $\quad A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \qquad \left(\begin{array}{l} A'(t) = a(t) \\ A(t_0) = 0 \end{array} \right)$]

CI CONCENTRIAMO SUL CASO in CUI $A(t)$ non dipende da t

CIOÈ A è una matrice $N \times N$ FISSA e il problema diventa (caso a coefficienti costanti)

$$\begin{cases} Y' = AY + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

COMINCIAMO CON IL CASO <u>OMOGENEO</u>

$$(P_0) \quad \begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

dove $t_0 \in \mathbb{R}$ e $Y_0 \in \mathbb{R}^N$ $\left(I = \mathbb{R} \; !!\right)$
(le soluzioni $Y(t)$ esistono $\forall t \in \mathbb{R}$)

Per risolvere (P) dobbiamo introdurre l'esponenziale di una matrice $A \to \boxed{e^A}$

<u>Def.</u> Se A è una matrice $N \times N$ definisco

$$(*) \quad e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{24}A^4 + \dots$$

È chiaro che la cosa ha senso dato che lo spazio delle matrici è uno spazio lineare con una norma (prendo la norma "matriciale": $\|A\|$ è la miglior costante c : $\|Ax\| \le c\|x\| \; \forall x$) so che questo spazio è un $\mathbb{R}^{N^2}$ e dunque è completo.
LA Serie in $(*)$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGE (rispetto alla norma detta sopra). Infatti

$$\sum_0^\infty \left\| \frac{A^n}{n!} \right\|_{N \times N} \le \underbrace{\sum_0^\infty \frac{1}{n!} \|A\|^n}_{= e^{\|A\|} < +\infty} \cdot \left(\begin{array}{l} \text{perché } \|AB\| \le \|A\| \|B\| \\ \Rightarrow \|A^n\| \le \|A\|^n \end{array} \right)$$

Dunque per ogni matrice $N\times N$ A è definita la matrice e^A. VEDIAMO LE PROPRIETÀ DI e^A

- $e^0 = I$ (ovvio) ($A^0 = I$ per convenzione)

- VORREI $e^{A+B} = e^A e^B$. QUESTO È VERO SE $AB = BA$

Infatti

$$e^A e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} = \left(\text{prodotto alla Cauchy}\right)$$

$$\sum_0^\infty a_n \sum_0^\infty b_n = \sum_0^\infty \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k B^{n-k}}{k!\,(n-k)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{k} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \text{se } AB = BA$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n$$

Vediamo per esempio $n=2$: $(A+B)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} A^k B^{2-k} =$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. TORNA SOLO SE $AB = BA$

$(A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$

Però se A e B commutano torna! : se $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$

- LA FUNZIONE $t \mapsto M(t) := e^{tA}$ (da $\mathbb{R}$ nelle matrici $N\times N$)

è derivabile e $M'(t) = A\,M(t)$ $\forall t$

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{A^n}{n!} =$$

(si può fare ragionando come nelle serie di potenze)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, t^{n-1} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n =$$

$$A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = (\text{cambio di indice}) A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = A\, M(t)$$

TEOREMA La soluzione di

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

è data dalla formula $Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0$.

DIM. Basta notare che $e^{(t-t_0)A} Y_0 \Big|_{t=t_0} = e^{0A} Y_0 = I_d Y_0 = Y_0$

e che

$$\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} Y_0 = \left(\frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A}\right) Y_0 = \left(A\, e^{(t-t_0)A}\right) Y_0 =$$

Teorema sopra NOTA CHE

$$e^{(t-t_0)A} = e^{tA - t_0 A} = e^{tA} e^{-t_0 A}$$

perché tA e $t_0 A$ commutano

$$A\, e^{(t-t_0)A} Y_0 = A\left(e^{(t-t_0)A} Y_0\right)$$

Ho trovato una soluzione con il dato iniziale che volevo. PER L'UNICITÀ $\Rightarrow$ HO TROVATO **LA** soluzione

D'ORA IN POI PRENDO $t_0 = 0$.

DUNQUE LA SOL. è

$$\boxed{Y(t) = e^{tA} Y_0}$$

A questo punto mi chiedo se c'è un modo di calcolare e^{tA} (senza fare la somma della serie)

Per capire come calcolare e^{tA} cominciamo da casi semplici.

(1) $A = 0 \Rightarrow e^{tA} = I \quad \forall t$

(2) $A = I$

$$e^{tI} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^n}{m!} I^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^n}{m!} I = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^n}{m!}\right) I = e^t I$$

DUNQUE se devo risolvere $Y' = Y$, $Y(0) = Y_0$

allora $Y(t) = e^t Y_0$.

IN QUESTO CASO $\underline{\text{PIUTTOSTO semplice}}$ è eq. è

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ \vdots \\ y_N' = y_N \end{cases} \leftarrow \text{OGNI RIGA SI RISOLVE PER CONTO SUO...}$$

Più in generale se $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$e^{tA} = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_N t}) \quad . \text{ INFATTI}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{Diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_N^n) =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \dots$$

$$\mathrm{Diag}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_1^n, \dots, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_N^n\right) = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_N t})$$

ANCHE IN QUESTO CASO, se guardo il sistema, vedo che ogni riga si risolve per conto suo...

(3) M matrice invertibile e cerchiamo $e^{MAM^{-1}}$:

VIENE $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (MAM^{-1})^n$ MA

$$(MAM^{-1})^n = \underbrace{(MA\cancel{M^{-1}})(\cancel{M}A\cancel{M^{-1}}) \dots (\cancel{M}AM^{-1})}_{n \text{ volte}} = MA^nM^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad e^{MAM^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M A^n M^{-1} = M\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) M^{-1}$$

$$\boxed{e^{MAM^{-1}} = M e^{A} M^{-1}}$$

per esempio se A è simmetrica

OTTENGO ALLORA che, se A è diagonalizzabile,

cioè se esiste $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)$ ed esistono M, M^{-1} (cambio di base) tale che $A = MDM^{-1} \Rightarrow$

$$e^{A} = M \,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_N})\, M^{-1}$$

$$e^{tA} = M \,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_N t})\, M^{-1}$$

ESEMPIO Voglio risolvere

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 3x - y \end{cases}$$

(voglio tutte le soluzioni ..)

IN QUESTO CASO $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ che è simmetrica

VOGLIO DIAGONALIZZARE A. Cerco gli autovalori e gli autovettori

Polinomio caratteristico: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \underbrace{-(1+\lambda)(2-\lambda) - 9}_{\lambda^2 - \lambda - 11} = \lambda^2 - \lambda - 2 - 9$$

Radici $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{45}}{2} = \dfrac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1+3\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-3\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Cerco un autovettore relativo a $\lambda_1 = \dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}$

$$Ae = \lambda_1 e \iff (A - \lambda_1 I)e = 0 \qquad e = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 - \left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right) & 3 \\ 3 & -1 - \left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

(so che il det $= 0$, basta una delle due righe). LA I° RIGA:

$$\frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} x + 3y = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(1 - \sqrt{5})x + 2y = 0$$

$$y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} x$$

per esempio $\boxed{x = 2 \quad y = \sqrt{5} - 1}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}$$

So che l'altro autovettore è ortogonale. Posso prendere

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

MI SERVE IL CAMBIO DI BASE. MI SERVE LA M t.c.

$$A = M D M^{-1}$$

Deve essere $M = [e_1, e_2]$ $\qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 - \sqrt{5} \\ \sqrt{5} - 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{1+3\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-3\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$\Big($ det $=$ $4 + (1 - \sqrt{5})^2 =$ $4 + 1 + 5 - 2\sqrt{5}$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} - 1 \\ 1 - \sqrt{5} & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10 - 2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} - 1 \\ 1 - \sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = M \, e^{tD} \, M^{-1} =$$

$$\frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ \sqrt{5}-1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5}-1 \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ \sqrt{5}-1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{\lambda_1 t} & (\sqrt{5}-1)\, e^{\lambda_1 t} \\ (1-\sqrt{5})\, e^{\lambda_2 t} & 2\, e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 4e^{\lambda_1 t} + (1-\sqrt{5})^2 e^{\lambda_2 t} \, , & 2(\sqrt{5}-1)\, e^{\lambda_1 t} + 2(1-\sqrt{5})\, e^{\lambda_2 t} \\ 2(\sqrt{5}-1)\, e^{\lambda_1 t} + 2(1-\sqrt{5})\, e^{\lambda_2 t} \, , & (\sqrt{5}-1)^2 e^{\lambda_1 t} + 4 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = e^{tA}$$

Cerchiamo la sol con $x(0)=1$ $y(0)=0$ $\Longleftrightarrow$ $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Y(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4e^{\lambda_1 t} + (1-\sqrt{5})^2 e^{\lambda_2 t} \\ 2(\sqrt{5}-1)\, e^{\lambda_1 t} + 2(1-\sqrt{5})\, e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

se metto $t=0$ trovo $\frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 + (1-\sqrt{5})^2 \\ 2(\sqrt{5}-1) + 2(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ..

si potrebbe verificare se l'eq. è verificata...

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 3x - y \end{cases}$$

??