Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 67 17/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

- CONFERMO CHE LU 29/5 ore 8.30-10.30 aula C21
  MA 30/5 ore 8.30-10.30 aula C21

  ci saranno due lezioni di recupero

- Chi fosse interessato a fare gli orali la prima settimana di giugno mandi una mail – VEDIAMO SE SARÀ POSSIBILE

AGGIUNTA A QUANTO VISTO SULLE SUPERFICI

TEOREMA Supponiamo di avere $G_1 \dots G_k : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con la proprietà (di "trasversalità")

$$(T) \begin{cases} \text{se } i_1 \dots i_h \in \{1 \dots k\},\ G_{i_1}(x) = \dots = G_{i_h}(x) = 0 \\ \Rightarrow \nabla G_{i_1}(x) \dots \nabla G_{i_h}(x) \text{ sono lin. indip.} \end{cases}$$

ALLORA POSTO $S = \{ G_1(x) = 0,\ G_2(x) \le 0 \dots G_k(x) \le 0 \}$

S è una sup. regolare e

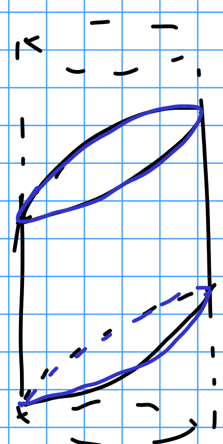
$$\Sigma^*(S) = \Sigma(S) = \{ G_1(x)=0,\ \exists j \text{ tra } 2 \text{ e } K \text{ con } G_j(x)=0 \}$$

NON LO DIMOSTRIAMO.

Per esempio $S = \{ x^2+y^2=1,\ 1 \le x+y+z \le 2 \}$

è una superficie regolare e

$$\Sigma^*(S) = \Sigma(S) = \{ \underbrace{x^2+y^2=1}_{\text{cilindro}},\ z+x+y=1 \} \cup \{ x^2+y^2=1,\ x+y+z=2 \}$$



OSS. ABBIAMO TRATTATO SISTEMI DI ORDINE 1

$$Y' = F(t, Y)$$

(IN FORMA NORMALE. perché "Y' sta per conto suo")

Se avessi un sistema di ordine n potrei sempre trasformarlo in un sistema (con molte più incognite) di ordine 1

Per esempio $\qquad y'' + y'^2 + 50y = x$

(eq. di ordine 2) $\qquad$ Posso fare così:

$u = y \quad v = y' \qquad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ l'equazione diventa

$$\begin{cases} v' + v^2 + 50u = x \\ u' = v \end{cases}$$

. - - - - .

CONSIDERIAMO IL CASO LINEARE N intero

ABBIAMO un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ I aperto

Due funzioni CONTINUE $A : I \to$ matrici $N \times N$

$B : I \to \mathbb{R}^N$

($a_{ij} : I \to \mathbb{R}$, $b_i : I \to \mathbb{R}$ continue , $i, j = 1 .. N$)

L'eq che voglio risolvere è :

$$(E_L) \qquad Y' = A(t)\,Y + B(t) \qquad \left(y_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)\, y_j + b_i(t) \right)$$

Posso poi aggiungere una condizione iniziale: dati $\boxed{t_0 \in I, \; Y_0 \in \mathbb{R}^N}$

$(C.I) \qquad Y(t_0) = Y_0$. DUNQUE il prob di Cauchy

$$(P) \begin{cases} Y' = A(t)\,Y + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Come si confronta con la teoria generale? Il Prob. è associato a

$$F(t, Y) := A(t)\,Y + B(t) \qquad \text{definita su}$$

$\Omega = I \times \mathbb{R}^N$ (se uso questa F trovo il problema lineare)

DOMANDA: Questa F verifica le ipotesi del teor. di Cauchy

VEDIAMO: prendiamo $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^N$ e $t \in I$

$$\|F(t,Y_2)-F(t,Y_1)\|_N = \|A(t)Y_2+\cancel{B(t)}-A(t)Y_1-\cancel{B(t)}\|_N$$

$$= \|A(t)(Y_2-Y_1)\|_N \le \underbrace{\|A(t)\|_{matrici}}_{\le L \quad \forall t \in I} \|Y_2-Y_1\|_N$$

Se I_1 intervallo chiuso e limitato $I_1 \subset I \Rightarrow$

$$\exists \; L = \max_{t \in I_1} \|A(t)\|$$

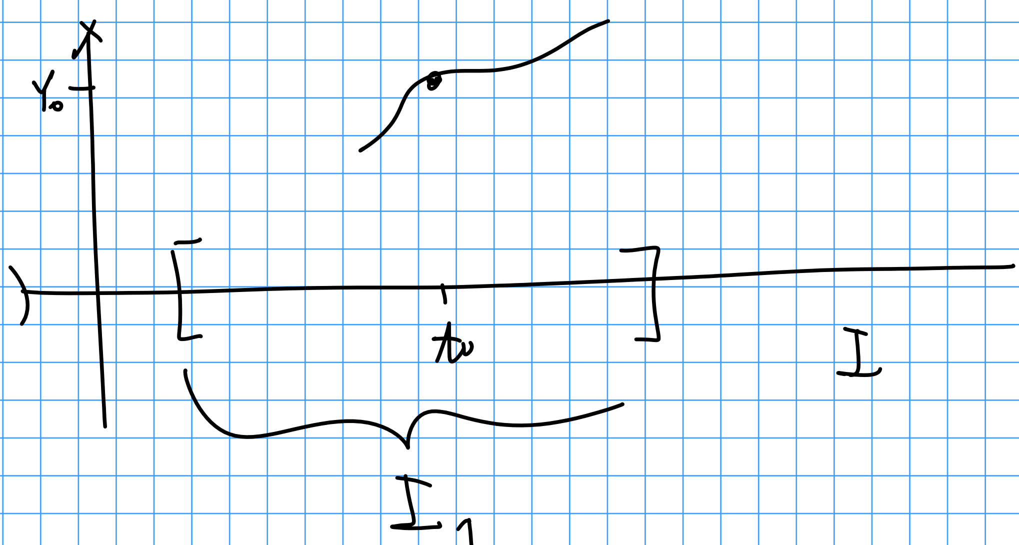
(perché A è continua $\Rightarrow \|A\|$ è continua e vale Weierstrass se I_1 è limitato e chiuso)

DUNQUE

$$\|F(t,Y_2)-F(t,Y_1)\| \le L \, \|Y_2-Y_1\| \qquad \forall Y_1, Y_2 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I_1$$

(L dipende da I_1)

Siccome I_1 è arbitrario vale il teorema di esistenza locale (e unicità)



VEDIAMO ORA CHE VALE UN TEOREMA DI ESISTENZA "GLOBLALE"

Premettiamo un calcolo

Supponiamo di avere una soluzione di (E_L) definita

per $t \in]a,b[$, con $[a,b] \subset I$ $\quad Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t) \quad \forall t \in [a,b]$

Facciamo il prodotto scalare con $Y(t)$

$$Y'(t) \cdot Y(t) = (A(t)Y(t)) \cdot Y(t) + B(t) \cdot Y(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Y(t)\|^2 \leq \|A(t)\| \, \|Y(t)\|^2 + \|B(t)\| \, \|Y(t)\| \leq$$

$\left(\|Y(t)\|^2 = Y(t) \cdot Y(t) \Rightarrow \text{derivata} = 2Y' \cdot Y \right)$

$$\leq \|A(t)\| \, \|Y(t)\|^2 + \frac{\|B(t)\|^2 + \|Y(t)\|^2}{2}$$

DUNQUE se chiamo $p(t) = \|Y(t)\|^2$ ho trovato

$$\rightarrow \boxed{p' \underset{=}{\leq} C_1 p + C_2}$$

per due costanti C_1, C_2

(C_1 dipende da $\|A(t)\|$)

(perché $\|A(t)\|$ e $\|B(t)\|$ ammettono massimo se $t \in [a,b]$)

se fosse = un'equazione avrei $\quad p(t) = e^{c_1(t-t_0)} \left(p(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-c_1(t-t_0)} c_2 \right)$

che (fatti un po' di conti) $\Rightarrow p(t) \leq C_3 e^{c_1 t} + C_4$

In realtà si può fare gli stessi conti con la disuguaglianza

DUNQUE se Y è soluzione di (E_L) su $[a,b]$ esistono tre costanti C, C_1 e D tali che

$$\|Y(t)\|^2 \leq C e^{C_1 t} + D$$

QUESTO ANDAMENTO IMPLICA CHE $\|Y(t)\|$ è limitato per $t \in]a,b[$

e quindi il tempo massimale $\bar{t} \geq b$, il tempo minimale $\underline{t} \leq a$

TEOREMA Se I è quello iniziale e $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ $t_0 \in I$

$\Rightarrow$ la soluzione Y con $Y(t_0) = Y_0$ è **definita su tutto I**

Se NO dovrebbe esistere $\bar{t} \in I$ $\bar{t} > t_0$ con $\|Y(t)\|$ illimitato vicino a $\bar{t}$ e questo è impossibile a causa del calcolo fatto sopra

DUNQUE Le equazioni lineari hanno soluzioni definite su tutto l'intervallo I (per cui hanno senso su cui sono definiti $A(t)$ e $B(t)$)

NO