Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 66 16/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

LUNEDÌ 29 8.30 – 10.30
MARTEDÌ 30 10.30 – 12.30 RECUPERI

ULTIMO ARGOMENTO SISTEMI DI EQ. DIFF.

Cominciamo con un teorema generale

SUPPONIAMO DI AVERE • $\underbrace{\Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^{N+1}}$ $= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$)

$\simeq$ TEMPO VARIABILI SPAZIALI

(Ci immaginiamo di descrivere il moto di un punto $Y(t) \in \mathbb{R}^N$ al variare di $t \in \mathbb{R}$)

• $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ con le seguenti proprietà:

(a) $F(t, Y)$ è continua in (t, Y) (F continua)

(b) ESISTE UNA COSTANTE $L \in \mathbb{R}$ tale che:

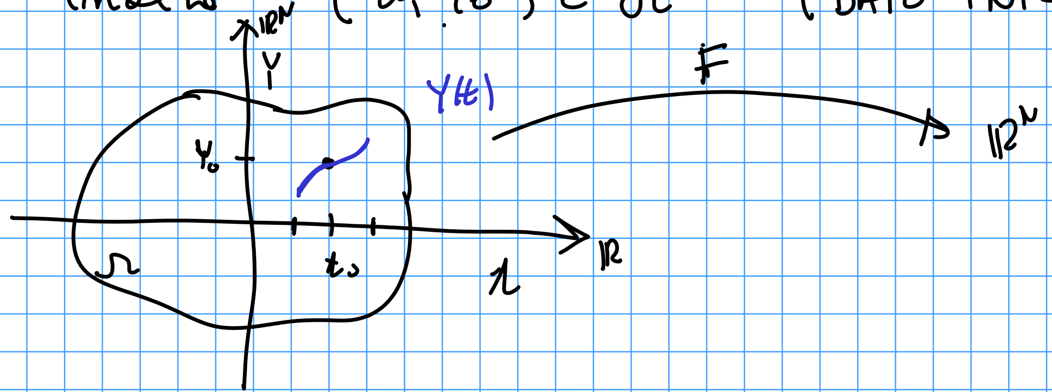
$$\| F(t,Y_2) - F(t,Y_1)\|_{\mathbb{R}^N} \le L \, \|Y_2 - Y_1\|_{\mathbb{R}^N} \qquad \forall Y_2, Y_1 \in \mathbb{R}^N \ \forall t \in \mathbb{R}$$

con $(Y_2,t)(Y_1,t)\in\Omega$

La proprietà (b) si esprime dicendo che F è "lipschitziana" in Y, uniformemente rispetto a t, di costante L

(g è lipschitziana di costante L se $\|g(X_2)-g(X_1)\| \le L\|X_2-X_1\|$)

• Sia inoltre $(t_0, Y_0) \in \Omega$ (DATO INIZIALE)



ALLORA (TEOREMA DI CAUCHY) Esiste $\delta > 0$

ed esiste $Y :]t_0-\delta, t_0+\delta[\to \mathbb{R}^N$ con le proprietà

- Y è C^1
- $(t, Y(t)) \in \Omega \qquad \forall t \in]t_0-\delta, t_0+\delta[$
- $Y(t_0) = Y_0$
- Vale $\qquad Y'(t) = F(t, Y(t))$

Inoltre se $\delta_1 > 0$ e $Y_1 :]t_0-\delta_1, t_0+\delta_1[\to \mathbb{R}^N$ con

$(Y_1(t), t) \in \Omega$, $\quad Y_1(t_0) = Y_0$

$Y_1'(t) = F(Y_1(t), t)$

ALLORA $\qquad Y_1(t) = Y(t) \quad$ se $t \in]t_0-\delta_2, t_0+\delta_2[$

$\delta_2 = \min(\delta, \delta_1)$

cioè c'è un'altra soluzione che parte da (Y_0, t_0), questa coincide con Y per le t in cui sono definite tutte due

IL TEOREMA DI CAUCHY che abbiamo appena enunciato (NO DIM.) ci dà un risultato di <u>ESISTENZA</u> (LOCALE - vicino a t_0) E <u>UNICITÀ</u> per il "problema di Cauchy"

$$(P) \quad \begin{cases} Y' = F(t,Y) & \leftarrow \text{EQUAZIONE} \\ Y(t_0) = Y_0 & \leftarrow \text{DATO INIZIALE} \end{cases}$$

IN GENERALE DIREMO che $Y :]a,b[\to \mathbb{R}^N$ è soluzione dell'equazione

$$\boxed{(E) \quad Y' = F(t,Y)}$$

se Y è C^1 su $]a,b[$, $(t, Y(t)) \in \Omega \quad \forall t \in]a,b[$

e $Y'(t) = F(t, Y(t)) \quad \forall t \in]a,b[$

Se si rimuove l'ipotesi di Lipschitz si perde l'unicità
(PURA CURIOSITÀ) $y' = \sqrt{y}$)

<u>OSS.</u> LO STESSO RISULTATO È VERO (ES. locale + unicità) se si chiede

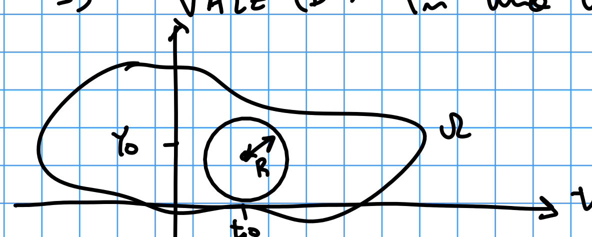
(a) F continua in Ω

(b.1) $\exists \frac{\partial F}{\partial Y}$ $\left(\exists \frac{\partial F}{\partial y_i}, i=1..N\right)$ e $\frac{\partial F}{\partial Y}$ è continua in Ω (in (t,Y))

<u>INFATTI se vale</u> (b.1) $\Rightarrow$ VALE (b) in una una qualunque $B((t_0,Y_0), R) \subset \Omega$

(scambiato Y_0 e t_0 in questo disegno)

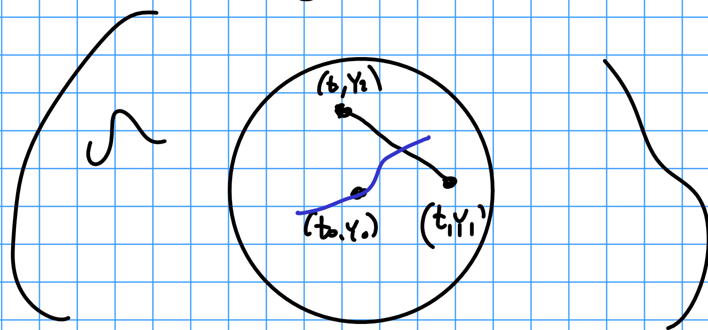
$P_0 = (t_0, Y_0)$



È chiaro che se $(t,Y_2),(t,Y_1) \in \overline{B(P_0,R)} =: B$
(VISTO A SUO TEMPO)

$$\Rightarrow \quad \|F(t,Y_2)-F(t,Y_1)\| \le \underbrace{\max_{P\in \overline{B}} \left\|\frac{\partial F}{\partial Y}(P)\right\|}_{=:L \text{ esiste per Weierstrass}} \|Y_2-Y_1\|$$

(usando Lagrange sul segmento tra (t,Y_2) e $(t,Y_1) \subset B$



DUNQUE $(b.1) \Rightarrow$ la (b) nell'aperto $\Omega_1 = B(P_0,R)$

Applico il teorema su $\Omega_1 = B(P_0,R)$ trovo una soluzione

$$Y(t) \qquad t_0-\delta < t < t_0+\delta \qquad \text{e} \quad (t, Y(t)) \in B \subset \Omega$$

IN SOSTANZA L'IPOTESI (b) mi serve vicino a (t_0, Y_0)

Da cui mi basta la $(b.1)$ (che è più comodo da verificare)

ESEMPIO Se studio il "sistema di eq. diff"

$$(E) \begin{cases} x' = x^2+y^2+z^2+t^2 \\ y' = x^2-y^2-z^2-t \\ z' = \ln(xyz+t^3) \end{cases}$$

IN QUESTO CASO HO:

$$F(t,x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2+t^2 \\ x^2-y^2-z^2-t \\ \ln(xyz+t^3) \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^4 \supset \Omega = \{ (t,x,y,z) : \quad xyz + t^3 > 0 \}$ (è aperto)

Per seguire il formalismo introdotto sopra

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad F(t,Y) = \quad =$$

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3 \qquad\qquad (N=3)$$

Si vede che, se $(t,Y) \in \Omega$

$$\exists \ \frac{\partial F}{\partial x}(t,Y), \ \exists \ \frac{\partial F}{\partial y}(t,Y), \ \frac{\partial F}{\partial z}(t,Y)$$

e sono continue in Ω

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2x \\ \dfrac{yz}{xyz+t^3} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \ldots \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = \ldots$$

(quindi vale (b.1) e naturalmente vale (a))

A questo punto se $x_0 y_0 z_0 + t_0^3 > 0$ esiste unica una soluzione di (E), definita vicino a t_0, con

$x(t_0) = x_0 \qquad y(t_0) = y_0 \qquad z(t_0) = z_0$

PROBLEMA DELL' INTERVALLO MASSIMALE.

<u>TEOREMA</u> Supponiamo vere le ipotesi (a) e (b)

Sia $(t_0, Y_0) \in \Omega$.

Allora esistono $\bar{t} > t_0$ e $\underline{t} < t_0$ (anche $\bar{t} = +\infty$, $\underline{t} = -\infty$)

ed esiste $\bar{Y} :]\underline{t}, \bar{t}[\to \mathbb{R}^N$ tale che: $\bar{Y}$ è C^1

- $(t, \overline{Y}(t)) \in \Omega \qquad \forall t \in]\underline{t}, \overline{t}[$
- $\overline{Y}'(t) = F(t, \overline{Y}(t))$
- $\overline{Y}(t_0) = Y_0$

e non esiste una soluzione definita su $]a, b[$ ($\ni t_0$) con $b > \overline{t}$ oppure $a < \underline{t}$. L'INTERVALLO $]\underline{t}, \overline{t}[$ si chiama "intervallo massimale di esistenza" per il Prob. di Cauchy (relativo a (t_0, Y_0)) e $\overline{Y}$ si chiama "soluzione massimale"

INOLTRE HO TRE POSSIBILITÀ per $\overline{t}$ / per $\underline{t}$

(i) $\overline{t} = +\infty$ $\quad$ ($\overline{Y}(t)$ è definita per ogni $t \geq t_0$)

(ii) $\overline{t} < +\infty$, $\quad \|\overline{Y}(t)\|$ è illimitata se $t \to \overline{t}^-$

(esiste un $t_n \to \overline{t}^-$ per cui $\|Y(t_n)\| \to +\infty$)

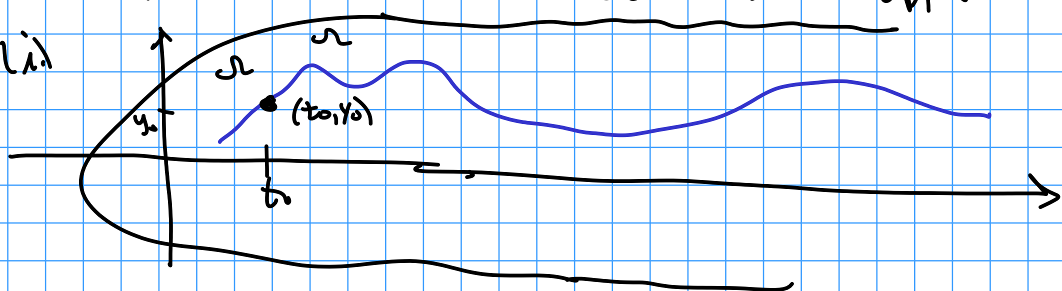
(iii) $\overline{t} < +\infty$, $\|\overline{Y}(t)\|$ è limitata per $t \geq t_0$ e

$$\operatorname{dist}\left((t, \overline{Y}(t)), \partial\Omega\right) \longrightarrow 0$$

($(t, Y(t))$ tende ad uscire da Ω)

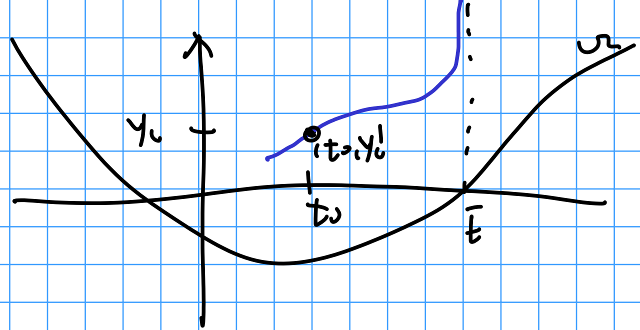
Se $N = 1$ i tre casi si rappresentano così

(i)



$y(t)$ esiste per tutti i t grandi

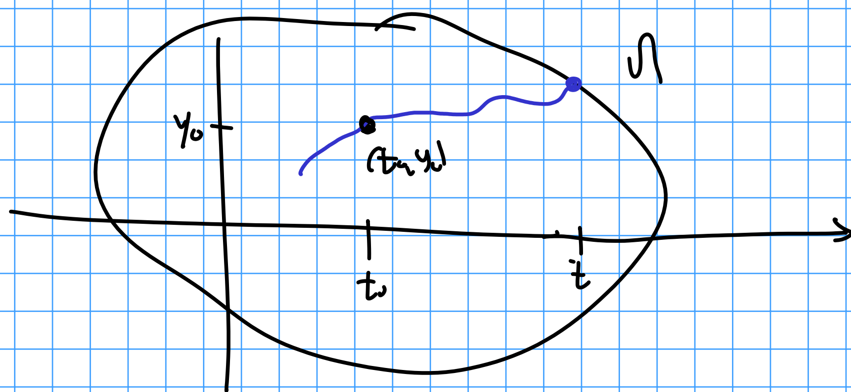
(ii)



$\bar t = \bar t(t_0, y_0)$

stesso discorso per $\bar t$

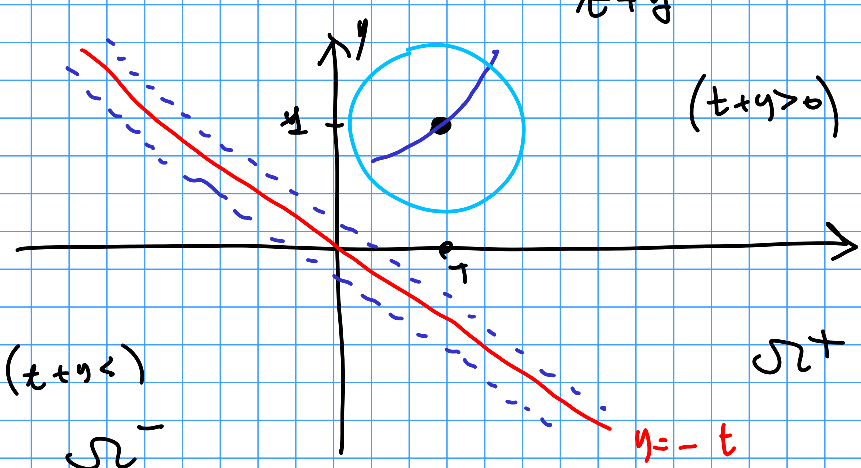
(iii)



ESEMPIO UNIDIMENSIONALE

$$y' = \frac{1}{t+y}$$

$N=1$ $\quad F(t,y) = \dfrac{1}{t+y} \quad \Omega = \{t+y \neq 0\}$



$\exists \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{-1}{(t+y)^2}$ continua in Ω

$\Rightarrow$ F è non lipschitziana in Ω, ma è lip. in ogni

$$\Omega_\varepsilon = \{ |y+t| > \varepsilon \} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

QUESTO BASTA PER L'ESISTENZA (E UNICITÀ) LOCALE

PARTIAMO DALLE COND. INIZIALI $y(1)=1$

So che esiste la sol. $y(t)$ definita per t vicino a 1

$$y(t)' = \frac{1}{t+y(t)} \qquad y(1)=1$$

<u>OSS</u> (legata al fatto che $N=1$)

$y' > 0 \Rightarrow y$ è crescente (fino a che $t+y(t)>0$)

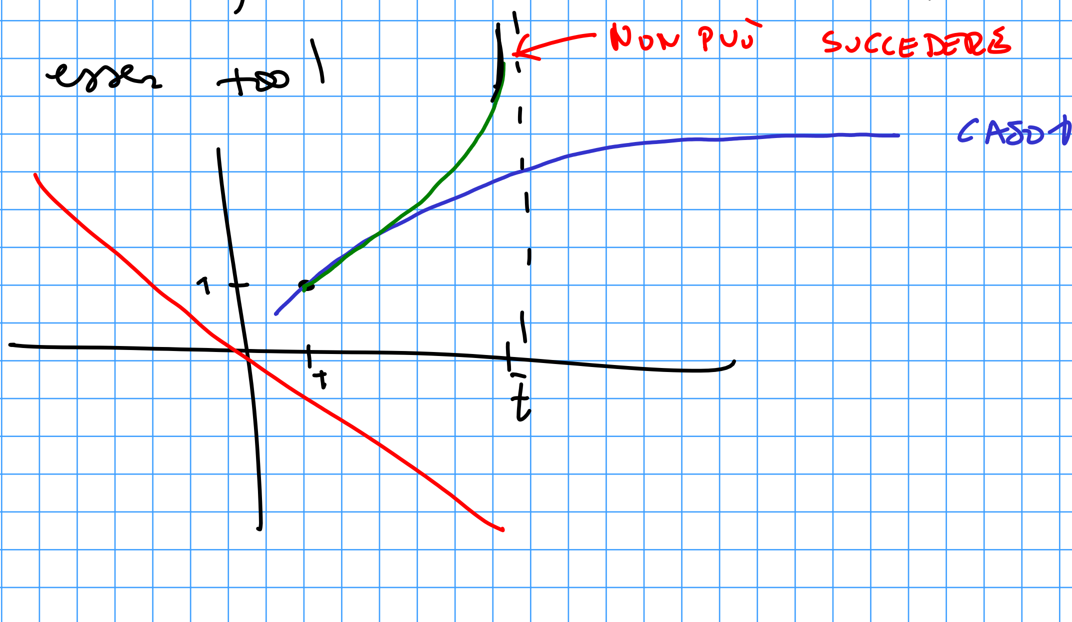
So che esiste l'intervallo massimale $]\underline{t}, \overline{t}[$ $\quad \underline{t} < 1 < \overline{t}$

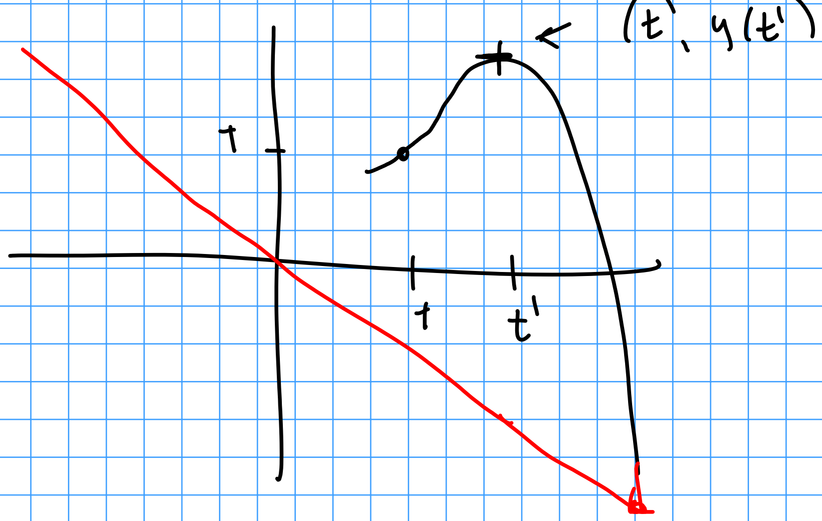
e la sol. massimale $\overline{y}(t)$.

DICO CHE per $\overline{t}$ può succedere solo

- $\overline{t} = +\infty$
- $\overline{t} < +\infty$, $\lim_{t\to\overline{t}} \overline{y}(t) = +\infty$

(nel secondo caso $(t, \overline{y}(t)) \in \Omega^+ \Rightarrow \overline{y}$ è crescente, $\overline{y}$ deve avere limite, questo limite deve essere $+\infty$!)





$y(t) > 1$

$y'(t) = \frac{1}{t' + y'(t)} > 0$

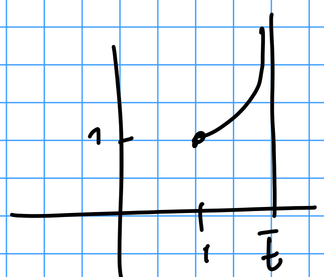
DICO CHE $\bar t < +\infty$ NON È POSSIBILE.

· INFATTI mettiamo che $\bar t < +\infty$. Allora

· $y(t)$ rimane crescente su $[1, \bar t[$

· $F(t, \bar y(t)) = \frac{1}{t + y(t)} \le \frac{1}{t} \le 1$ se $t \in [1, \bar t[$

$\left(\frac{1}{t + y(t)} \le \frac{1}{2} \right)$



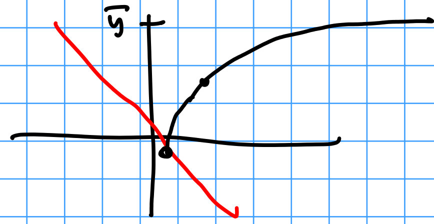
$\Rightarrow 0 < y'(t) \le 1 \Rightarrow y(t) \le 1 + (t - 1)$ $\Rightarrow \bar t = +\infty$

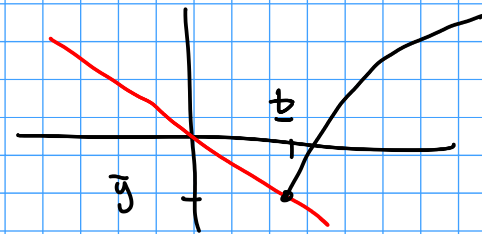
$\Rightarrow y(t)$ non può tendere a $+\infty$ se $t \to \bar t$

DUNQUE $\bar y(t)$ esiste per tutte le $t \ge 1$ e

$y'(t) \to 0$ se $t \to +\infty$ (ricordo che $y' = \frac{1}{t + y(t)}$)

(con un po' di pazienza dovrebbe essere possibile dimostrare che $\bar y := \lim_{t \to +\infty} y(t)$ esiste finito ??) ($\bar y$ esiste perché $\bar y(t)$ è crescente)





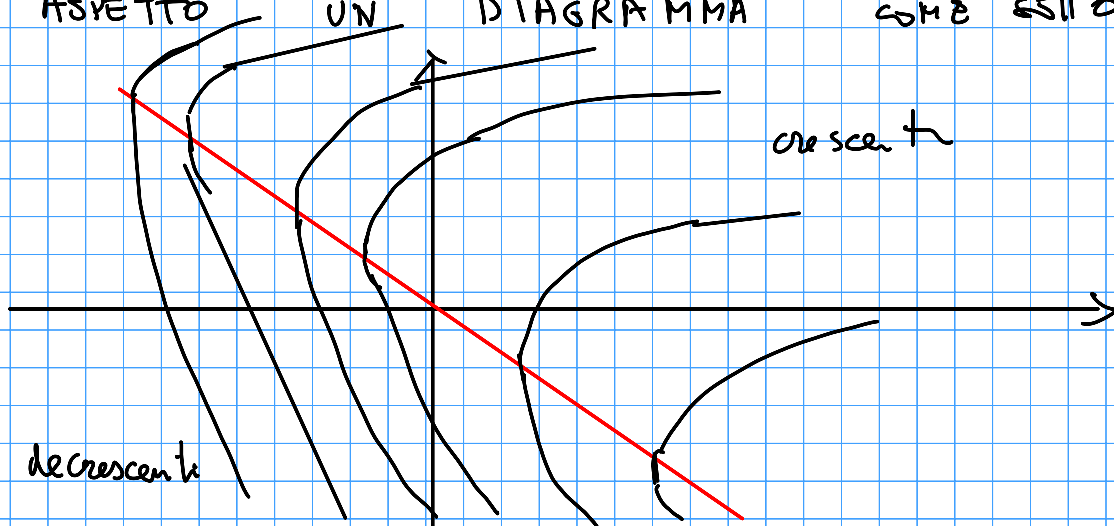
VICEVERSA È CHIARO che $\underline{y}$ è finito, $\underline{y}>0$

che $\overline{y}(t)$ è crescente su $]\underline{t}, +\infty[$ che

esiste $\underline{y} := \lim_{t\to\underline{t}^+} \overline{y}(t)$ e che $\underline{t}+\underline{y}=0$

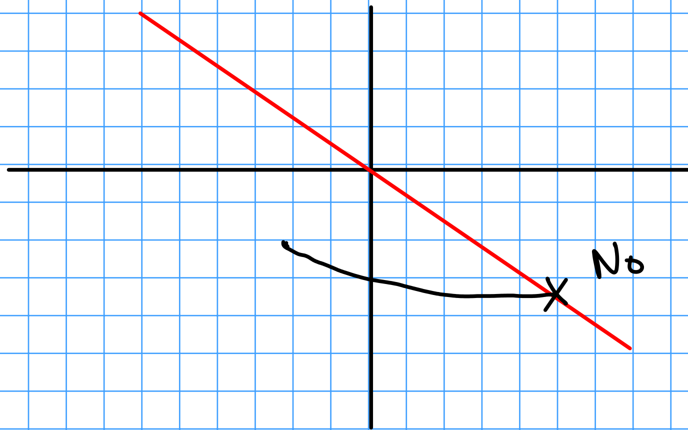
Inoltre $\lim_{t\to\underline{t}^+} y'(t) = +\infty$

MI ASPETTO UN "DIAGRAMMA" COME QUESTO



QUELLE CHE partono da (t_0, y_0) con $t_0+y_0<0$ sono decrescenti, $\bar{t}=+\infty$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$

si potrebbe dim. che le curve che partono sotto la linea rosso non toccano più la linea rossa in AVANTI



No

è un pò delicato.

$$\begin{array}{r} \overline{5}0\ + \\ 129\ + \\ 40 \\ \hline 219 \end{array}$$