Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 65 15/05/2023

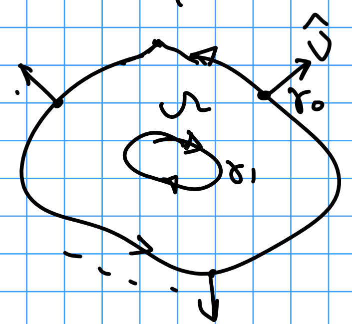
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

AVEVAMO VISTO che il t. divergenza vale anche in dim $N=2$ nella seguente forma:

TEOR. (DIVERGENZA IN DIM. 2)

Se Ω dominio regolare a tratti $\Rightarrow$ $\partial\Omega$ è descritto da $k+1$ curve $\gamma_0\ \gamma_1 \dots \gamma_k$, C^1 a tratti, che possono prendere con verso coerente a Ω.



Inoltre nei pti di $\partial_{reg}\Omega$ è definita la normale uscente $\hat{\nu}$.

Se $\vec{f}: W \to \mathbb{R}^2$, W aperto, $W \supset \bar{\Omega}$, $\vec{f}$ C^1 allora

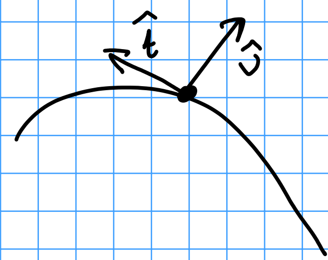
$$\iint_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)}_{\mathrm{div}\,\vec{f}} dx\,dy = \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, ds$$

INT. DI I^a spec. di $(\vec{f}\cdot\vec{\nu})$

$$\left(= \int_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, ds \right)$$

#

Vediamo una conseguenza di questo teorema:



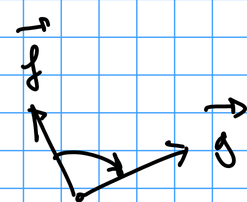
Se $P \in \partial_{reg}\Omega$ risultano definiti $\hat{\nu}(P)$ e $\hat{t}(P)$

dove $\hat{t}(P) = \dfrac{\gamma'(\tau)}{\|\gamma'(\tau)\|}$ dove $P = \gamma(\tau)$ $\tau \in [a,b]$

(Supponiamo che $\hat{t} = R\,\hat{\nu}$ dove R è una rotazione di $90°$ in verso antiorario: cioè se $\hat{\nu} = \nu_1 \vec{i} + \nu_2 \vec{j} \Rightarrow$
$\hat{t} = -\nu_2 \vec{i} + \nu_1 \vec{j}$; IN ALTRI TERMINI $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$)
($R\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\quad R\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$)

ALLORA supponiamo di avere un campo

$$\vec{f} = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j}$$



e consideriamo il campo

$$\vec{g} = f_2 \vec{i} - f_1 \vec{j} \qquad (\vec{g} = R^{-1}(\vec{f}))$$

Applichiamo il teorema della divergenza a $\vec{g}$:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x} g_1 + \frac{\partial}{\partial y} g_2 \right) dx\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1 \right) dx\,dy$$

$$\|$$

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{g} \cdot \vec{\nu}\, ds = \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot \hat{t}\, ds$$

$$\|$$

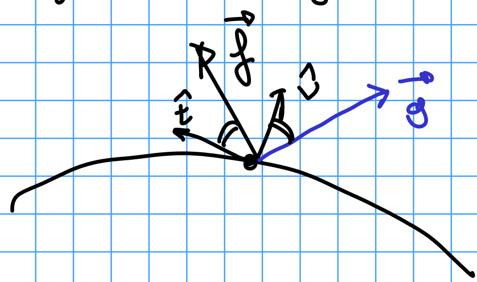
INFATTI $\quad \vec{g} = R^{-1} \vec{f} \qquad \hat{\nu} = R^{-1} \hat{t}$

$$\vec{g} \cdot \vec{\nu} = R^{-1} \vec{f} \cdot R^{-1} \vec{t} = \vec{f} \cdot \vec{t}$$

ma

oppure (più semplicemente

$$g_1 v_1 + g_2 \cdot v_2 = -f_2 - t_2 + f_1 t_1 = f_1 t_1 + f_2 t_2$$



$\boxed{\text{ho costruito } \vec g \text{ in modo che } \vec g \cdot \vec v = \vec f \cdot \vec t}$

$\hat t = R^{-1} \hat v \Rightarrow$

prendo $\vec g = R^{-1} \vec f$

INT. DI II° specie

Alla fine ho trovato

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \sum_{i=0}^{K} \int_{\gamma_i} \vec f \cdot d\vec s \underset{(\text{per def})}{=} \int_{\partial\Omega} \vec f \cdot d\vec s$$

IN QUESTA FORMULA $\partial\Omega$ deve essere percorso in verso coerente con Ω - ogni curva γ_i deve avere questa proprietà !!

QUESTA FORMULA

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial\Omega^+} \vec f \cdot d\vec s$$

VOGLIO ESPRIMERE IL FATTO CHE $\partial\Omega$ è percorso in verso coerente

SI CHIAMA FORMULA DI GAUSS-GREEN.

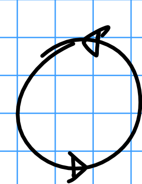
Per esempio

$$\vec f(x,y) = x^2 \vec i + xy \vec j$$

$$\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}$$

Allora $\partial\Omega$ è descritta da $\gamma(t) = \cos(t) \vec i + \sin(t) \vec j$

(che gira coerentemente con Ω)



ALLORA VALE LA FORMULA

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\frac{\partial}{\partial x} xy - \frac{\partial}{\partial y} x^2\right) dx\,dy = \int_\gamma (x^2\vec{\imath} + xy\vec{\jmath})\cdot d\vec{s}$$

Vediamo quanto vale a dx e a sx:

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} (y-0)\,dx\,dy = 0 \quad \text{per simmetria}$$

(lo posso vedere facilmente in coord polari)

$$\int_\gamma (x^2\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath})\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos^2 t\,\vec{\imath} + \cos(t)\sin(t)\,\vec{\jmath})}_{\vec{f}\circ\gamma}\underbrace{(-\sin(t)\vec{\imath} + \cos(t))}_{\gamma'}dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\sin(t)\cos^2(t) + \sin(t)\cos^2(t)\right)dt = 0$$

A riguardarlo è chiaro che $\vec{f} = x(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$

è nella direzione NORMALE A $\{x^2+y^2=1\}$

Se invece $\vec{f}(x,y) = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$ allora

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_\Omega (1-1)\,dx\,dy = 0$$

mentre

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\left(\sin(t)\vec{\imath} + \cos(t)\vec{\jmath}\right)\left(-\sin(t)\vec{\imath} + \cos(t)\vec{\jmath}\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right)dt = \int_0^{2\pi}\cos(2t)\,dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

__OSS.__ L'INTEGRANDO a sx della formula di G.G.

$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ è la componente $\vec{k}$ del rotore di $\vec{f}(x,y,z) = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + 0\,\vec{k}$

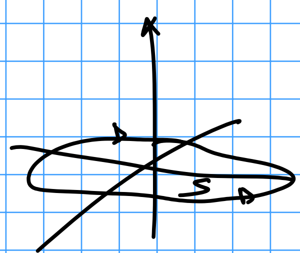
con una superficie parametrica S

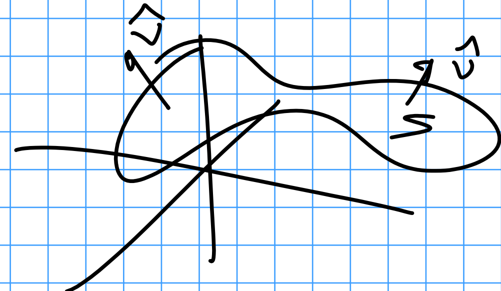
Se poi vedo l'aperto Ω V dentro $\mathbb{R}^3$ con normale che punta verso l'asse z, posso interpretare G-G come

$$\iint_S \operatorname{rot}\left(f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + 0\,\vec{k}\right)\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \int_{\Sigma(S)^+} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

INTEGRALE CURVILINEO DI II° specie dove le curve sono prese con verso coerente con la normale e S

QUESTA FORMULA si può GENERALIZZARE A UNA QUALUNQUE SUPERFICIE PARAMETRICA S





Se S è una sup. parametrica, $\hat{\nu}$ è una scelta della versore normale. $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ Ω aperto $S \subset \Omega$, $\vec{f}$ C^1

Allora

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \int_{\Sigma(S)^{\hat{\nu}}} \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

dove a destra intendo $\sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{f}\cdot d\vec{s}$, e dove $\gamma_1 \dots \gamma_k$ descrivono $\Sigma(S)$, con verso coerente con $\hat{\nu}$.

(si può ricavarlo, con un po' di conti, dal teorema di G-G.)

PIU' IN GENERALE (INCOLLANDO SUP. PARAMETRICHE)

<u>TEOREMA</u> (STOKES) $(S, \hat{\nu})$ superficie regolare a tratti <u>orientata</u>. Ω aperto di $\mathbb{R}^3$ $S \subset \Omega$, $\vec{f}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo C^1. ALLORA SI HA

$$\phi(\mathrm{rot}\,\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \int_{\Sigma(S)_\nu} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

dove - di nuovo - a destra intendo $\sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ e γ_i descrivono $\Sigma(S)$ in modo coerente con $\hat{\nu}$.

<u>OSS.</u> Se $\Sigma(S) = \phi$ (per esempio $S =$ sfera) $\Rightarrow$

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{f} \cdot \hat{\nu} \cdot d\sigma = 0$$

per ogni campo definito in un intorno di $S = \{x^2+y^2+z^2=1\}$

Se $\vec{f}$ fosse definito su un intorno di $B = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ allora $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{f} = 0$ su tutto B $\Rightarrow$

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iiint_B \mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{f}\right) dx\,dy\,dz = 0$$

(TORNA!)

Però NON è DETTO che un campo C^1 definito vicino a S sia estendibile a tutto B.

QUESTA OSS È COLLEGATO CON IL PROBLEMA DELL'ESISTENZA DI UN POT. VETTORE ($\vec{F}$ tale che $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{f}$).

CONDIZIONE NECESSARIA $\mathrm{div}\,\vec{f} = 0$ $(\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0)$

Però ho di più: so che se $\vec{f}$ ammette pot. vettore $\Rightarrow$

su ogni superficie $(S, \hat{\nu})$ con $\Sigma(S) = \phi$ devo avere

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Se $\vec{f}$ ammette pot. vettore $\Rightarrow$ $\vec{f}$ ha flusso nullo attraverso una qualunque superficie orientabile senza bordo.

DUNQUE TROVO UN CONTROESEMPIO SE TROVO UN CAMPO $\vec{f}$ con $\text{div} \vec{f} = 0$ e $\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma \neq 0$ con $S =$ sfera.

Il controesempio è $\vec{f} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\|(x,y,z)\|^{3/2}}$

ESERCIZIO (ULTIMA domanda del compito visto l'altra volta)

$$\vec{f} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\|(x,y,z)\|^3}$$

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \leq \sqrt{2}\}$$

$$\iint_S (\text{rot} \vec{f} \cdot \hat{\nu}) \, d\sigma$$

Calcoliamo il rotore di $\vec{f}$

PARENTESI

Dato una funzione scalare ϕ e un campo $\vec{f}$
Calcoliamo il rotore di un campo

$$\text{rot}\left(\phi(x,y,z) \, \vec{f}(x,y,z)\right) =$$

mi aspetto : $\boxed{\vec{\nabla} \otimes (\phi \vec{f}) = \vec{\nabla}\phi \otimes \vec{f} + \phi\, \vec{\nabla} \otimes \vec{f}}$

Provo a dimostrarlo.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \vec{f} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \vec{f} + \phi \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \qquad \text{(sono ebbri)}$$

$$\vec{g} = \mathrm{rot}(\phi \vec{f})$$

$$g_3 = \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi f_1) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi\, f_2 + \phi \frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y}\phi\, f_1 - \phi \frac{\partial}{\partial y} f_1$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\phi\, f_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y} f_1}_{(\nabla \phi \otimes \vec{f})_3} + \underbrace{\phi\left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)}_{\phi (\mathrm{rot}\, \vec{f})_3} =$$

$$\det \begin{pmatrix} i & \frac{\partial \phi}{\partial x} & f_1 \\ j & \frac{\partial \phi}{\partial y} & f_2 \\ k & \frac{\partial \phi}{\partial x} & f_3 \end{pmatrix} = (\quad)\vec{i} - (\quad)\vec{j} + \vec{k}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} f_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y} f_1\right)$$

DUNQUE LA TERZA COMPONENTE TORNA! (per le altre è lo stesso), HO TROVATO

$$\vec{\nabla} \otimes (\phi \vec{f}) = \nabla \phi \otimes \vec{f} + \phi\, \vec{\nabla} \otimes \vec{f}$$

<u>CHIUSA PARENTESI</u>

Dovevo calcolare $\vec{\nabla} \otimes \left(\underbrace{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}_{\phi} \underbrace{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}_{\vec{f}} \right)$

$$= \nabla\phi \otimes (x\vec{i} + y + \vec{j} + z\vec{k}) + \phi\, \vec{\nabla}\otimes(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

Notiamo anche che $\phi(x,y,z) = \varphi(x^2+y^2+z^2)$ con $\varphi(t) = \frac{1}{t^{3/2}}$

$$\Rightarrow \nabla\phi(x,y,z) = \varphi'(x^2+y^2+z^2)\underbrace{(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k})}_{\nabla(x^2+y^2+z^2)} =$$

$$-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{3}{\|(x,y,z)\|^5}\cancel{2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\nabla\phi(P) \quad \frac{-3}{\|P\|^5}\vec{P} \qquad\qquad \vec{f}(P) = \frac{\vec{P}}{\|P\|^3}$$

$$\Rightarrow \nabla\phi(P) \otimes \vec{f}(P) = -\frac{3}{\|P\|^8}\vec{P}\otimes\vec{P} = 0$$ RIMANE

$$\phi \cdot \vec{\nabla}(\overbrace{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}^{\vec{f}_1})$$

$$\operatorname{rot}\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} i & D_x & x \\ j & D_y & y \\ k & D_z & z \end{bmatrix} = 0$$

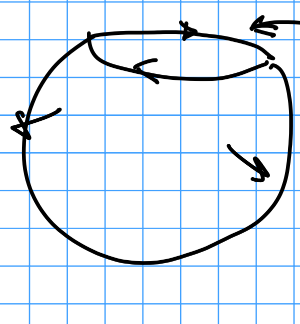
(ERA TUTTO OVVIO DATO CHE f è RADIALE
$\Rightarrow$ CONSERVATIVO
$\Rightarrow$ IRROTAZIONALE)

DUNQUE $\iint_S \operatorname{rot}\vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$

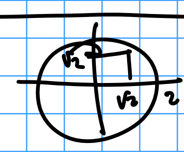
Peraltro, a causa di Stokes, avrei

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \int_{\Sigma^!(S)} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$$

dove γ



$\gamma(t) = \sqrt{2}\cos(t) - \sqrt{2}\sin(t) + \sqrt{2}k$



$\sqrt{2}^2 + \rho^2 = 4$

Però non serve fare il calcolo dato che γ è chiusa,

$\vec{f}$ è conservativo $\Rightarrow$ $\oint_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$