Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

.

Lezione 63   10/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ricevimento su appuntamento da concordare per email

2. (14 p.) Si considerino i seguenti insiemi (contenuti in $\mathbb{R}^3$):

$$
\begin{aligned}
D &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \le 4, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\} \\
S &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 4, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\} \\
L &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \le 2, z = \sqrt{x^2+y^2}\} \\
B &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = 2, z = \sqrt{2}\}
\end{aligned}
$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := zx^2y^2(-y\vec{\mathbf{i}} + x\vec{\mathbf{j}})$$

Se $P \in \partial_{reg} D$ (frontiera regolare di D) indichiamo con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria a ∂D uscente da D, nel punto P.

1. Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta. (1 p.) ☐

   [a] $(0,0,0) \in \Sigma(L)$;

   [~~b~~] $(0,0,0) \notin \Sigma(L)$, ma $(0,0,0) \in \Sigma^*(L)$;

   [c] $(0,0,0) \notin \Sigma^*(L)$, ma $(0,0,0) \in L$;

   [d] $(0,0,0) \notin L$.

2. Si dica se $\partial D \setminus \partial_{reg} D = B$: [vero] [~~falso~~]. $(0 \notin \partial_{reg} D)$ ☐

3. Si calcoli: (1 pt.) ☐

   $\hat{\nu}(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1) =$ [$-\frac{1}{2}$] $\vec{\mathbf{i}}+$ [$\frac{1}{2}$] $\vec{\mathbf{j}}+$ [$\frac{\sqrt{2}}{2}$] $\vec{\mathbf{k}}$/[non esiste];

4. Si calcoli: (1 pt.) ☐

   $\hat{\nu}(-1, 1, \sqrt{2}) =$ [ ] $\vec{\mathbf{i}}+$ [ ] $\vec{\mathbf{j}}+$ [ ] $\vec{\mathbf{k}}$/[~~non esiste~~];

5. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (3 pt.) ☐

   $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) =$ [0].

6. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(L, \hat{\nu})$: (3 pt.) ☐

   $\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) =$ [0].

7. Si calcoli il flusso di $\text{rot}\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (4 pt.) ☐

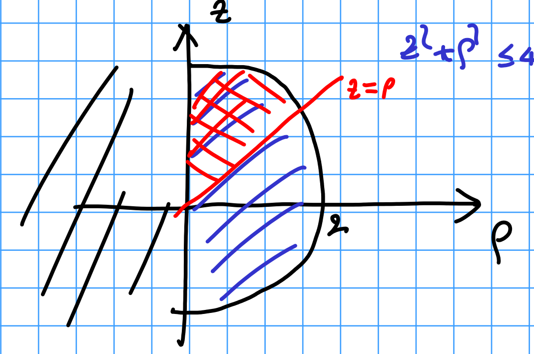
   $\Phi(\text{rot}\vec{f}, S, \hat{\nu}) =$ [ ].

$$D = \{ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \, , \; z \geq \sqrt{x^2+y^2} \}$$

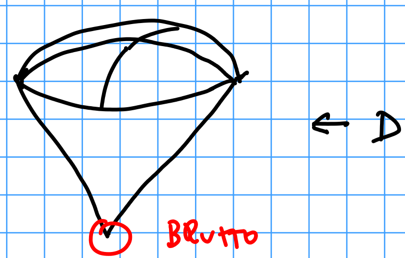
Come è fatto D ?! Poniamo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $(\rho \geq 0$

e guardiamo il piano (ρ, z):

$$\rho^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq \rho$$



Tornando in $\mathbb{R}^3$ D = rotazione attorno all'asse z della figura in Rosso



Si vede che D è un dominio regolare e tutto individuato da

$$G_1 \leq 0, \; G_2 \leq 0 \qquad \text{dove} \quad G_1 = x^2+y^2+z^2-4$$
$$G_2 = \sqrt{x^2+y^2} - z$$

$$D = \{ G_1 \leq 0, G_2 \leq 0 \}$$

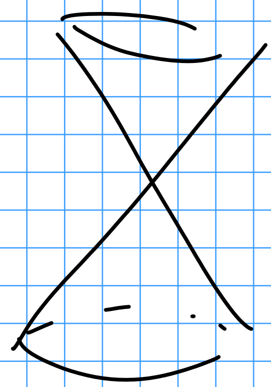
c'è un problema: G_2 non è C^1 in $\mathbb{R}^3$, solo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{x=y=0\}$

FACCIAMO PRIMA LA RICERCA DI ∂D

Dato che $D = \underbrace{\{G_1 \leq 0\}}_{\text{chiuso}} \cap \underbrace{\{G_2 \leq 0\}}_{\text{chiuso}} \Rightarrow$

$$\partial D = \partial\{G_1 \leq 0\} \cap \{G_2 \leq 0\} \cup \{G_1 \leq 0\} \cap \partial\{G_2 \leq 0\}$$
$$= \{G_1 = 0\} \cap \{G_2 \leq 0\} \cup \{G_1 \leq 0\} \cap \{G_2 = 0\}$$

Qui si vede a occhio che $\partial\{G_1 \leq 0\} = \{G_1 = 0\}$ ovvio



$\partial\{G_2 \leq 0\} = \{G_2 = 0\}$
si vede direttamente

$\Downarrow$

CONVIENE DIRE CHE

$\{z \geq \sqrt{x^2+y^2}\} = \{z^2 \geq x^2+y^2 \quad z \geq 0\}$

Se riscrivo $D = \{x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z^2 \geq x^2+y^2,\ z \geq 0\} =$

$$\{G_1 \leq 0,\ G_2 \leq 0,\ G_3 \leq 0\}$$

dove $G_1 = x^2+y^2+z^2-4$, $G_2 = x^2+y^2-z^2$, $G_3 = -z$

$G_1\ G_2\ G_3$ sono C^1

RIMANE COMUNQUE IL PROBLEMA CHE $\nabla G_2(0,0,0) = 0$

QUESTO CASO NON RICADE NEI TEOREMI FATTI ☹

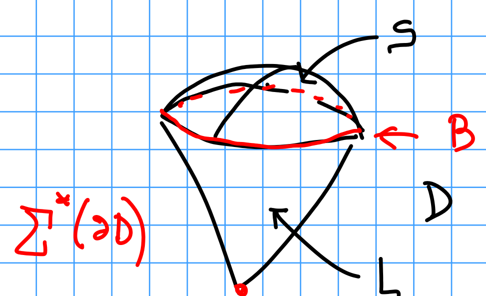
IN REALTÀ SI PUÒ DIM. DIRETTAMENTE CHE

$$\partial D = \{x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\} \cup \{z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$$

è una sup regolare a tratti e

$$\Sigma^*(\partial D) = \{x^2+y^2+z^2 = 4,\ z = \sqrt{x^2+y^2}\} \cup \{(0,0,0)\}$$

(FIDIAMOCI · SI VEDE DALLA FIGURA)



$\partial D = S \cup L$

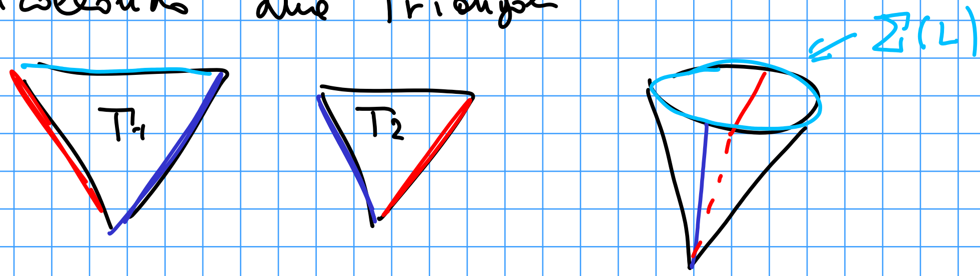
$\Sigma^*(\partial D) = B \cup \{0\}$

$\Sigma^*(S) = \Sigma(S) = B \quad \Sigma^*(L) = B \cup \{0\}$

$0 \in L$! $\quad 0 \in \Sigma^*(L)$

$\Sigma(L) = B$

Se volessi dim. $\Sigma(L) = B$ dovrei ottenere L incollando due Triangoli:



$P_1 \quad (-\sqrt{2}/2 \ \sqrt{2}/2, 1)$

$\leftarrow$ esistono $\hat{\nu}(P_1)$ $\hat{\nu}(P_2)$

$P_2 \quad (-1, 1, \sqrt{2})$

($\hat{\nu}$ versore normale uscente !!)

$P_1, P_2 \in \partial D$??

$P_1 \notin S$ $\qquad$ $P_1 \in L$?? $\underline{\text{si}}$ $\quad x^2+y^2 = z^2 \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \qquad P_1 \neq (0,0,0)$

$\exists\ \hat{\nu}(P_1)$ e lo trovo prendendo $\dfrac{\nabla G_2}{\|\nabla G_2\|}(P_1)$

$$G_2 = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}\, - z \qquad \nabla G_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} - \vec{k} \qquad (x\ x^2+y^2 \neq 0)$$

$$\nabla G_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \vec{k} \qquad \leftarrow \text{NORMA} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1} = \sqrt{2}$$

$$\hat{\nu}(P_1) = -\frac{\vec{i}}{2} + \frac{\vec{j}}{2} - \frac{\vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$P_2 \in (-1, 1, \sqrt{2}) \qquad P_2 \in S \cap L = B \Rightarrow P_2 \in \Sigma^*(\partial D)$

$\hat{\nu}(P_2)$ NON ESISTE

$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu})$ $\qquad$ dove $\boxed{\vec{f} = z x^2 y^2 (-y\vec{i} + x\vec{j})}$

se $(x,y,z) \in L \qquad \hat{\nu}(x,y,z) = \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} - \vec{k}}$ $\boxed{\text{VA NORMALIZZATA}}$

A QUESTO POMERIGGIO

CONTINUAZIONE

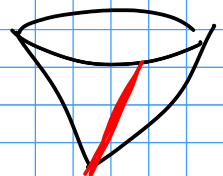
$\hat{\nu}(P)$ (normale a L in P) è $\perp$ a $\vec{g}(P)$

$$\left(2x^2y^2(-y\vec{i}+x\vec{j})\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}-\vec{k}\right)=$$

$$2x^2y^2\left(\frac{-yx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+0\right)=0$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{g}, L, \hat{\nu})=0.$$

Se voglio fare i calcoli dovrei prendere una parametrizzazione di L:

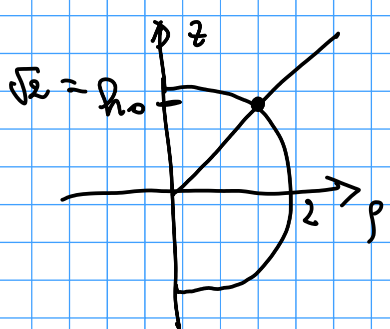


$$\boxed{\Gamma(\theta,h) = h\cos\theta\,\vec{i} + h\sin\theta + h\,k \qquad 0\le\theta\le 2 \quad 0\le h\le\sqrt{2}}$$

h_0

non è proprio una parametrizzazione C^1 dato che c'è un problema per $h=0$ ma ai fini del flusso è OK (e non è iniettiva!!)

INO



$$\begin{cases} z=\rho \\ \rho^2+z^2=4 \end{cases} \qquad \rho^2+\rho^2=4 \qquad \rho^2=2 \qquad \rho=\sqrt{2}$$

$$\Gamma(\theta,h)= h\cos\theta\,\vec{i}+h\sin\theta\,\vec{j}+h\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}=$$

$$\frac{\partial r}{\partial h} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{N}_r(\theta, h) = \frac{\partial r}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial r}{\partial h} =$$

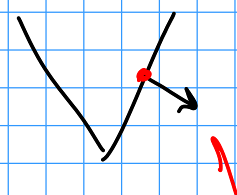
$$\left(-h\sin\theta\,\vec{i} + h\cos\theta\,\vec{j}\right) \otimes \left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}\right) =$$

RICORDO CHE $\vec{i} \otimes \vec{i} = \vec{j} \otimes \vec{j} = \vec{k} \otimes \vec{k} = 0$

$\vec{i} \otimes \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \otimes \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \otimes \vec{i} = \vec{j}$

$$-h\sin\theta\sin\theta\,\overset{\vec{k}}{\overbrace{\vec{i} \otimes \vec{j}}} - h\sin\theta\,\overset{-\vec{j}}{\vec{i} \otimes \vec{k}} + h\cos\theta\cos\theta\,\overset{-\vec{k}}{\vec{j} \otimes \vec{i}} + h\cos\theta\,\underset{\vec{i}}{\vec{j} \otimes \vec{k}} =$$

$$h\cos\theta\,\vec{i} + h\sin\theta\,\vec{j} - h\,\vec{k} = \vec{N}(\theta, h)$$



VA VERIFICATO CHE $\vec{N}_r$ va d'accordo con $\hat{\nu}$ — È VERO

Allora $\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \iint_\Omega \vec{f}(r(\theta, h)) \cdot N_r(\theta, h)\, d\theta\, d\theta =$

$\Omega = \{0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le h \le \sqrt{2}\}$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} h(h\cos\theta)^2(h\sin\theta)\underbrace{\left(-h\sin\theta\,\vec{i} + h\cos\theta\,\vec{j}\right) \cdot \left(h\cos\theta\,\vec{i} + h\sin\theta\,\vec{j} - h\,\vec{k}\right)}_{=0} dh$$

$\longrightarrow$ RITROVO ZERO

$$\boxed{\Phi(L, \vec{f}, \hat{\nu}) = 0}$$

- FLUSSO DI $\vec{f}$ attraverso $(S, \hat{\nu})$

Parametrizzo S con coordinate sferiche

$$\Gamma(\varphi,\theta) = 2\overbrace{\left(\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k}\right)}^{\vec{\Gamma}}$$

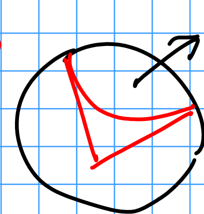
$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi} = 2\left(\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j} - \sin\varphi\,\vec{k}\right)$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = 2\sin\varphi\left(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{N}_\Gamma(\varphi,\theta) = 4\sin\varphi\left(\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{j} - \sin\varphi\,\vec{k}\right)\otimes\left(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right) =$$

$$4\sin\varphi\Big(\underbrace{\cos^2\theta\cos\varphi\,\vec{k} + \sin^2\theta\cos\varphi\,\vec{k}}_{1} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{i}\Big)$$

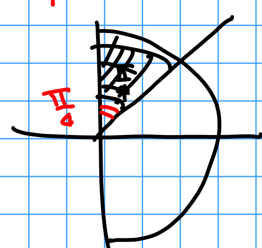
$$= \underbrace{4\sin\varphi}_{\geq 0}\,\hat{\Gamma}(\varphi,\theta) \leftarrow \text{CONCORDE CON } \hat{\nu}$$



$$\left(\hat{\Gamma} = \frac{1}{2}\Gamma\right)$$

DOVE VARIANO φ e θ ??

$0 \leq \theta \leq 2\pi$



$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

DUNQUE

$$\phi(S,\vec{f},\hat{\nu}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \vec{f}(\Gamma(\varphi,\theta)) \cdot N_\Gamma(\varphi,\theta)\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} 2\cos(\varphi)(2\cos\theta\sin\varphi)^2(2\sin\theta\sin\varphi)^2$$

$$\left(-2\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + 2\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j}\right)\left(\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\varphi\,\vec{k}\right)4\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} 256\cos\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta\sin^5\varphi\Big(\underbrace{-\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi}_{=0\ !!}\Big)d\varphi$$

$$= 0$$

DI NUOVO $\hat{\nu}(P) \perp \vec{f}(P)$ su S

$$\hat{\nu}(P) = \frac{P}{\|P\|} = \frac{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}{2} \qquad (\text{su } S = S(0,2))$$

$$\vec{f}(x,y,z) = z x^2 y^2 (-y\imath + x\jmath)$$

ORTOGONALI.

DUNQUE $\phi(L) = \phi(S) = 0 \Rightarrow \boxed{\phi(\partial D) = 0}$

DUNQUE DOVREI RITROVARLO facendo $\iiint_D \operatorname{div} \vec{f}\, dx\,dy\,dz$

$$\operatorname{div} \vec{f} = -2xy^3 z + 2x^3 yz = 2zxy(x^2 - y^2)$$

VEDIAMO L'INTEGRALE DI $\operatorname{div} \vec{f}$:

$$2 \iiint_D xyz(x^2 - y^2)\, dx\,dy\,dz$$

coordinate sferiche

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = \rho \cos\varphi$$

$$dx\,dy\,dz = \underbrace{\rho^2 \sin\varphi}_{\det J_{\text{cambio}\ldots}}\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le \rho \le 2 \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 d\rho\, (\rho \cos\theta \sin\varphi)(\rho \sin\theta \sin\varphi)(\rho\cos\varphi) \cdot$$
$$(\rho^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi - \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)\, \rho^2 \sin\varphi$$

$$\underbrace{2 \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, d\theta}_{1} \ \underbrace{\int_0^{\pi/4} \sin^5\varphi \cos\varphi\, d\varphi}_{2} \ \underbrace{\int_0^2 \rho^7\, d\rho}_{3}$$

② $= \quad s = \sin\varphi \qquad ds = \cos\varphi\, d\varphi \qquad$ s varia tra $\sin(0)=0 \quad \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{2}} s^5\, ds = \left[\frac{s^6}{6}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{8} = \frac{1}{48}$$

③ $= \dfrac{\rho^8}{8} = \dfrac{2^8}{8} = 2^5 = 32$

① $= \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin 2\theta \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 4\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(4\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = 0$

VIENE ZERO ANCHE QUI

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \qquad (\rho \leq 2 \,!!)$$

$$z \geq \sqrt{\underbrace{x^2}_{\rho^2\sin^2\varphi} + y^2} \Leftarrow \boxed{\rho\cos\varphi \geq \rho\sin\varphi} \qquad \begin{array}{l} \tan\varphi \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{array}$$

3. (10 p.) Si considerino i seguenti insiemi (contenuti in $\mathbb{R}^3$):

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 4,\, z \leq \sqrt{2}(x^2+y^2-1)\}$$
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 4,\, z \leq \sqrt{2}\}$$
$$L := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \sqrt{2}(x^2+y^2-1),\, z \leq \sqrt{2}\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 2,\, z = \sqrt{2}\}$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})$$

Se $P \in \partial_{reg}D$ (frontiera regolare di D) indichiamo con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria a ∂D uscente da D, nel punto P.

1. Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta. (1 pt.)

   - [a] $B \subset \Sigma(\partial D)$, ma $B \neq \Sigma(\partial D)$;
   - [b] $B = \Sigma(\partial D) \neq \Sigma^*(\partial D)$;;
   - [~~c~~] $B = \Sigma^*(\partial D) \neq \Sigma(\partial D)$;
   - [d] $B \supset \Sigma^*(\partial D)$, ma $B \neq \Sigma^*(\partial D)$;
   - [e] nessuna delle precedenti.

   $\Sigma^*(\partial D) = \emptyset$

   $\Sigma(\partial D) = B$

2. Si calcoli: (1 pt.) $\hat{\nu}(0,0,-\sqrt{2}) =$ $\boxed{0}$ $\vec{\mathbf{i}} +$ $\boxed{0}$ $\vec{\mathbf{j}} +$ $\boxed{1}$ $\vec{\mathbf{k}}$ / non esiste;

3. Si calcoli: (1 pt.)

   $\hat{\nu}(1,1,-\sqrt{2}) =$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ $\vec{\mathbf{i}} +$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ $\vec{\mathbf{j}} +$ $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\vec{\mathbf{k}}$ / non esiste;

4. Si dica se $\vec{f}$ è conservativo: vero falso. (1 pt.)
5. Si dica se $\vec{f}$ è solenoidale: vero falso. (1 pt.)

   VERI ENTRAMBI (GIÀ VISTO)

6. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (3 pt.)

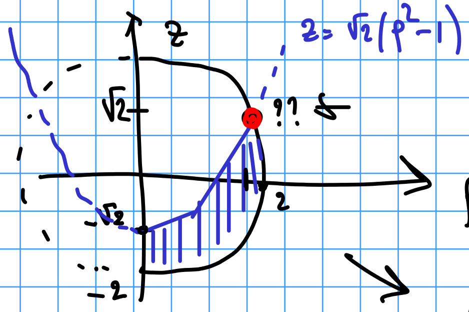
   $$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \boxed{4\pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

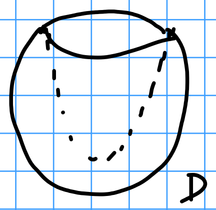
7. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(L, \hat{\nu})$: (2 pt.)

   $$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \boxed{-4\pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

$$D = \{ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \le \sqrt{2}(x^2+y^2-1) \}$$

(DI NUOVO D è "di rotazione" dato che x e y compaiono solo mediante x^2+y^2 $(= \rho^2)$





IN "COOR. CIL." D si descrive come

$$z^2+\rho^2 \le 4$$
$$z \le \sqrt{2}(\rho^2-1)$$

$$\begin{cases} z^2+\rho^2 = 4 \\ z = \sqrt{2}(\rho^2-1) \end{cases}$$

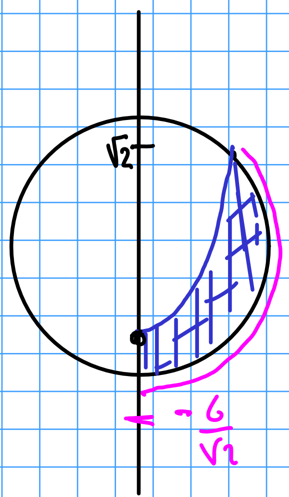
$$2(\rho^2-1)^2+\rho^2 = 4$$

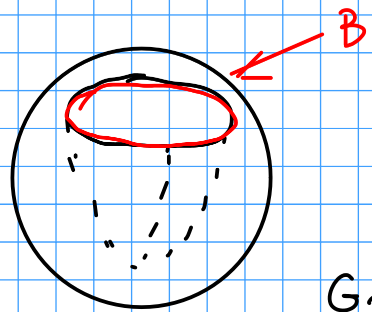
$$2(\rho^4-2\rho^2+1)+\rho^2-4 = 0$$

$$2\rho^4-3\rho^2-2 = 0$$

$$\rho^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3\pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{2} \qquad z = \sqrt{2}$$





D è reg. a tratti

$$D = \{ G_1 \le 0,\ G_2 \le 0 \}$$

$$G_1 = x^2+y^2+z^2-4$$

$$G_2 = z - \sqrt{2}(x^2+y^2-1)$$

(si può verificare che ∇G_1 e ∇G_2 lin. ind. nei pti di B

dove $B = \{ G_1 = G_2 = 0 \} = \{ z = \sqrt{2},\ x^2+y^2 = 2 \}$

DUNQUE ∂D è una sup. reg. a tratti con $\Sigma(\partial D) = \emptyset$, $\Sigma^*(\partial D) = B$

$$\partial D = \underbrace{\{ G_1 = 0,\ G_2 \le 0 \}}_{S} \cup \underbrace{\{ G_1 \le 0,\ G_2 = 0 \}}_{L}$$

$(x,y,z)\in S \iff x^2+y^2+z^2=4 \quad z\le \sqrt{2}(x^2+y^2-1)$

$\left(x^2+y^2 = 4-z^2\right)\Big) \iff x^2+y^2+z^2=4,\quad z\le\sqrt{2}(4-z^2-1)$

$z \le \sqrt{2}\,(3-z^2) \qquad \sqrt{2}z^2 + z - 3\sqrt{2} \le 0$

$z_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1\pm5}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} \frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2} \\ -\frac{6}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$ + non conta

$z_1 \le z \le z_2 \qquad -\frac{3}{\sqrt{2}} < -2$ no

$\frac{3}{\sqrt{2}} > 2 \qquad 3>2\sqrt{2} \quad 9>8 \quad \boxed{\text{si}}$

$S=\{x^2+y^2+z^2=4,\ z\le\sqrt{2}\}$

$L \to \quad x^2+y^2+z^2\le 4 \qquad z=\sqrt{2}(x^2+y^2-1)$

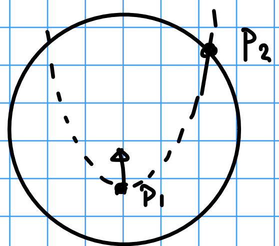
$x^2+y^2\le 4-z^2 \to z\le\sqrt{2}(4-z^2-1)$ come prima ... $z\le\sqrt{2}$

$L=\{z=\sqrt{2}(x^2+y^2-1) \quad z\le\sqrt{2}\}$

DUNQUE $\quad \partial D = S\cup L \quad$ (L, S quelli del testo)

$P_1=(0,0,-\sqrt{2})$

$P_2=(1,1,\sqrt{2})$



$\nu(P_1) = +\vec{k}$

$P_2\in B \quad$ NON ESISTE $\hat{\nu}(P_2)$ (però nel testo $P_2=(1,1,-\sqrt{2})$)

$G_2(P_1)=0 \quad G_1(P_1)>0 \qquad G_2 = z-\sqrt{2}(x^2+y^2-1)$

$\nabla G_2 = -4\sqrt{2}\,x\,\vec{i} - 4\sqrt{2}\,y\,\vec{j} + \vec{k}$

$\nabla G_2(P_1) = \vec{k}$ già normalizzato

Se $\vec{J}$ è solenoidale (VA CONTROLLATO) $\Rightarrow \operatorname{div}\vec{J} = 0$

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec f = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{\partial D} \vec f\cdot\hat\nu \, d\sigma = 0$$

$$\parallel$$

$$\iint_S \vec f\cdot\hat\nu \, d\sigma + \iint_L \vec f\cdot\hat\nu \, d\sigma$$

I DUE FLUSSI SONO OPPOSTI

BASTA <u>CALCOLARNE UNO</u>.

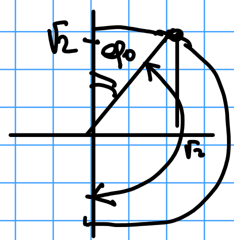
Su S è facile perché $\hat\nu(P) = \frac{\vec P}{2}$ se $P\in S$

mentre $\vec f(P) = \frac{\vec P}{4}$

DUNQUE $\phi(\vec f, S, \hat\nu) = \iint_S \frac{\vec P}{4}\cdot\frac{\vec P}{2}\, d\sigma = \iint \frac{|\vec P|^2}{8}\, d\sigma$

$$\iint_S \frac{4}{8}\, d\sigma = \frac{1}{2}\,\text{Area}(S)$$

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varphi_0}^{\pi} 4\sin\varphi \, d\varphi$$



$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$!!

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi} 4\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$8\pi\left[-\cos\varphi\right]_{\pi/4}^{\pi} = \boxed{8\pi\left(1+\frac{\sqrt2}{2}\right)} \leftarrow \text{AREA}(S)$$

(la sfera intera ha area $4\pi\cdot 4 = 16\pi$)

$$\phi(S) = \frac{1}{2}\,\text{Area} = 4\pi\left(1+\frac{\sqrt2}{2}\right)$$