Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

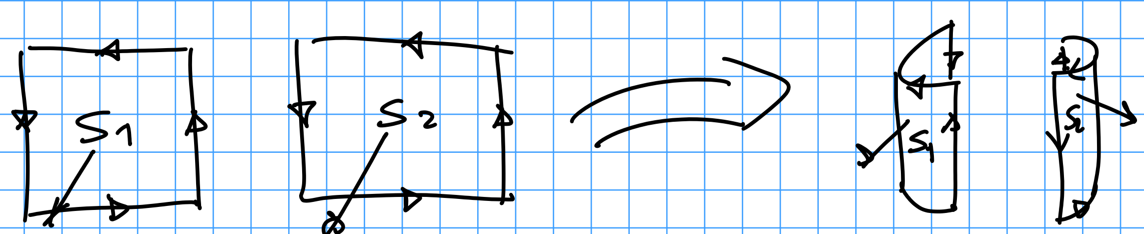
Lezione 62 09/05/2023

email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

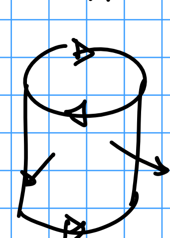
Ricevimento su appuntamento da concordare per email

VISTO LA NOZIONE DI "SUPERFICIE ORIENTABILE"

~ Se $S = S_1 \ldots S_k$ posso trovare su ogni S_i un versore normale $\hat{\nu}_i$ tale che i corrispondenti versi di $\Sigma_1(S_i)$ "si semplificano" quando incollo



$\|$



Se trovo tale scelta della $\hat{\nu}_i$

$\Rightarrow$ Ho trovato un campo di versori $\hat{\nu}$ normali definiti su $S \setminus \Sigma_1^*(S)$

ALLORA DICO CHE $(S, \hat{\nu})$ è una sup. orientata.

IN TALE SITUAZIONE HO AUTOMATICAMENTE definito il verso di $\Sigma_1(S)$ coerente con $\hat{\nu}$

Def. Se $(S, \hat{\nu})$ è SUP. ORIENTATA e $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^3$ continua allora definisco il flusso di $\vec{f}$ su $(S, \hat{\nu})$

$$\Phi(\vec{f}, \hat{\nu}) := \sum_{i=1}^{k} \Phi(\vec{f}, S_i, \hat{\nu}_i)$$

dove $\underbrace{S_1 \dots S_k}$ è una decomposizione $\underbrace{e\ \hat{\nu}_i}$ = ν come della sopra

TEOREMA D dominio regolare a tratti LIMITATO

(e anche ieri era meglio chiedere D limitato)

($\Rightarrow$ $S = \partial D$ è una superficie reg. a tratti — DETTO IERI)

$\Rightarrow$ $\boxed{\partial D \text{ è ORIENTABILE}}$ e si può scegliere come "ORIENTAZIONE" il versore $\hat{\nu}(P)$ def. da

$$\hat{\nu}(P) = \frac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i(P)\|} \qquad \forall P \in \underbrace{\partial D \setminus \Sigma(\partial D)}_{\partial_{reg} D}$$

dove i è l'unico indice per cui $G_i(P) = 0$

RICORDO CHE $\Sigma^*(\partial D) = \{P : \exists\, i \neq j : G_i(P) = G_j(P) = 0\}$

Si usa anche la nozione di "FRONTIERA REGOLARE" cioè

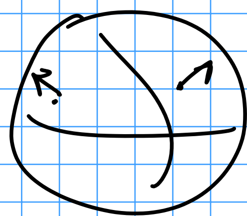
$$\partial_{reg} D = \{ P : \exists\, i : G(P) = 0 \text{ e } \forall j \neq i \ G_j(P) < 0 \}$$

DUNQUE $\partial_{reg} D = \partial D \setminus \Sigma^*(\partial D)$.

QUESTA ORIENTAZIONE SI CHIAMA "USCENTE" DA D

e $\hat{\nu}$ si chiama <u>versore normale a ∂D USCENTE DA D</u>

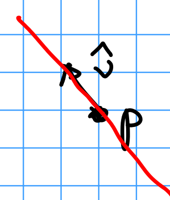
DUNQUE NEL CASO $S = \partial D$ esiste una "normale canonica"



<u>OSS.</u> il fatto che $\hat{\nu}$ sia uscente deriva dal seguente fatto

Se $P \in \partial_{reg}(D)$ so che $\exists!\ i : G_i(P) = 0$

e so che $$\hat{\nu}(P) = \frac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i(P)\|}$$



Valutiamo $$G_i\big(\underbrace{P + t\,\hat{\nu}(P)}_{\gamma(t)}\big) = \varphi(t)$$

$$\varphi(0) = G_i(\gamma(0)) = G_i(P) = 0$$

$$\varphi'(0) = \nabla G_i(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla G_i(P) \cdot \hat{\nu}(P) =$$

$$\nabla G_i(P) \cdot \frac{\nabla G_i(P)}{\|\nabla G_i(P)\|} = \frac{\|\nabla G_i(P)\|^2}{\|\nabla G_i(P)\|} = \|\nabla G_i(P)\|$$

$\varphi(0) = 0 \quad \varphi'(0) > 0$

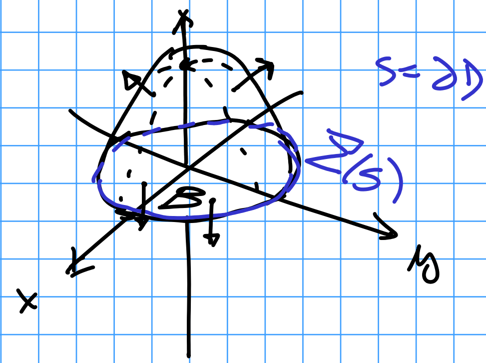
$\Rightarrow$ se $t > 0$, piccolo $\varphi(t) > 0$

$\Leftrightarrow$ se $t > 0$, t piccolo $P + t\hat{\nu}(P) \notin D$

DUNQUE $P + t\hat{\nu}(P)$ <u>esce</u> da D per $t > 0$ piccolo #

<u>ESEMPI</u> $D = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$

$S = \partial D$



$(x,y,z) \in D \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x,y) \in B$

$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in B \quad 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2\}$

(D è normale rispetto al piano x,y → rispetto all'asse z

$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in B \quad g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$

dove $g(x,y) = 0 \qquad h(x,y) = 1-x^2-y^2$

$$\partial D = \{ z=0, \ x^2+y^2 \leq 1 \} \cup \{ 1-x^2-y^2 = z \geq 0 \}$$

$$\partial_{reg} D = \underbrace{\{ z=0, \ x^2+y^2 < 1 \}}_{B} \cup \underbrace{\{ z = 1-x^2-y^2, \ z>0 \}}_{L} =$$

$$\Sigma^{1*}(\partial D) = \{ z=0 = 1-x^2-y^2 \} = \{ x^2+y^2=1, z=0 \}$$

$$\hat{\nu}(x,y,z) = \begin{cases} -\vec{k} & (x,y,z) \in B \\ \dfrac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} & (x,y,z) \in L \end{cases}$$

- Se $P \in B$ la funzione definente è $G_1(x,y,z) = -z$

$$\nabla G_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{k} \quad (\|\nabla G_1\| = 1) = \hat{\nu}_1(x,y,z)$$

- Se $P = (x,y,z) \in L$ la funzione definente è $G_2(x,y,z) = z+x^2+y^2-1$

e $\nabla G_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\nu}_2(x,y,z) = \dfrac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$

Consideriamo $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) \underset{(def)}{=} \Phi(\vec{f}, B, \hat{\nu}_1) + \Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}_2)$$

Devo fare due flussi (separatamente)

- $\Phi(\vec{g}, B, \hat{\nu}_1) = \Phi(\vec{g}, B, -\vec{k})$ (Posso parametrizzare B con $\Gamma(u,v) = (u,v,0)$ ...)

$$\iint_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \vec{g}(u,v,0)\cdot(-\vec{k})\,du\,dv =$$

$$\iint_{(u^2+v^2)} (u\vec{i}+v\vec{j})\cdot(-\vec{k})\,du\,dv = 0$$

- $\Phi(\vec{g}, L, \hat{\nu}_2) = \ldots$

USO LA PARAM. (CARTESIANA)

$\Gamma(u,v) = (u, v, 1-u^2-v^2)$

$(u,v)\in\{u^2+v^2\leq 1\}$

$\vec{N}_\Gamma(u,v) = 2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k}$

DEVO CONTROLLARE SE Γ è coerente con $\hat{\nu}$

dati u,v $\quad \hat{\nu}(\Gamma(u,v)) = \dfrac{\vec{N}_\Gamma(u,v)}{\|\vec{N}_\Gamma(u,v)\|}$

$$\hat{\nu}\left(u\vec{i}+v\vec{j}+(1-u^2-v^2)\vec{k}\right) = \frac{2u\vec{i}+2v\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

$\boxed{\text{TORNA}}$

DUNQUE $\Phi(\vec{g}, L, \hat{\nu}_2) = \iint_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \vec{g}(u,v,1-u^2-v^2)\cdot(2u\vec{i}+2v\vec{j}+\vec{k})\,du\,dv =$

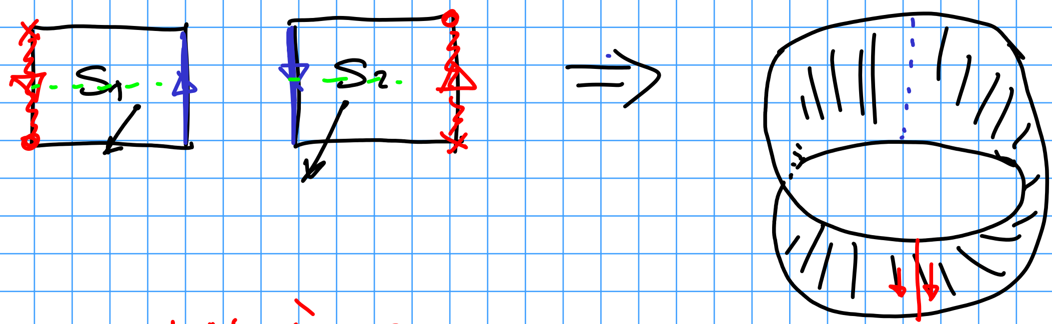
$$= \iint_{\{u^2+v^2\leq 1\}} \left(u\vec{i}+v\vec{j}+(1-u^2-v^2)\vec{k}\right)\left(2u\vec{i}+2v\vec{j}+\vec{k}\right)du\,dv =$$

$$= \iint_{\{u^2+v^2\leq 1\}} (2u^2+2v^2+1-u^2-v^2)\,du\,dv = \iint_{\{u^2+v^2\leq 1\}} (1+u^2+v^2)\,du\,dv =$$

(coord. polari) $= \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1+\rho^2)\rho\,d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 =$

$2\pi\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi$ $\leftarrow$ FLUSSO COMPLESSIVO DI $\vec{g}$ attraverso $(S,\hat{\nu})$

OSS. NON TUTTE LE SUPERFICI SONO ORIENTABILI



(NASTRO DI MOEBIUS)

NON È ORIENTABILE (NON CI POSSO FARE I FLUSSI)

CI SONO UN PAIO DI TEOREMI IMPORTANTI (DIVERGENZA E STOKES)

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

D dominio regolare e dati: LIMITATO

$(S, \hat{\nu}) = \partial D$ con l'orientazione USCENTE DA D

Ω aperto di $\mathbb{R}^3$ con $D \subset \Omega$ e $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ C^1

ALLORA

$$\iiint_D \left(\operatorname{div} \vec{f}\right) dx\,dy\,dz = \Phi\left(\vec{f}, S, \hat{\nu}\right) = \iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$$

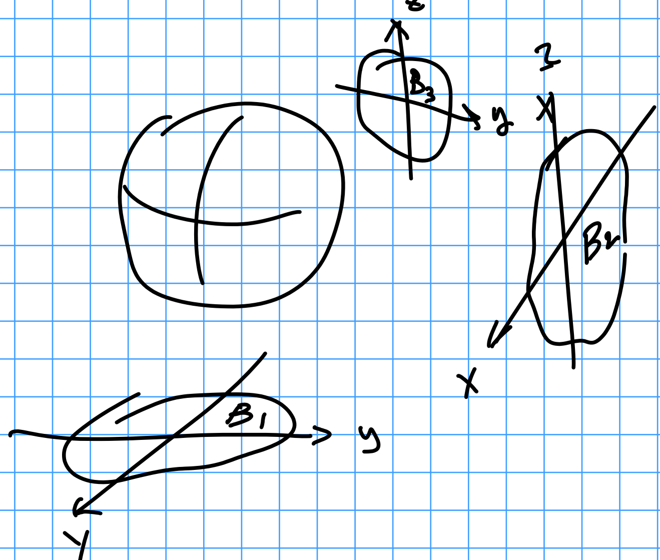
DIM (PARZIALE IN UN CASO FAVOREVOLE)

AGGIUNGO L'IPOTESI CHE D sia NORMALE RISPETTO A TUTTI TRE GLI ASSI :

$$D = \{ (x,y) \in B_1 \quad g_1(x,y) \le z \le h_1(x,y)$$

$$D = \{ (x,z) \in B_2 \quad g_2(x,z) \le y \le h_2(x,z)$$

$$D = \{ (y,z) \in B_3 \quad g_3(y,z) \le x \le h_3(y,z)$$



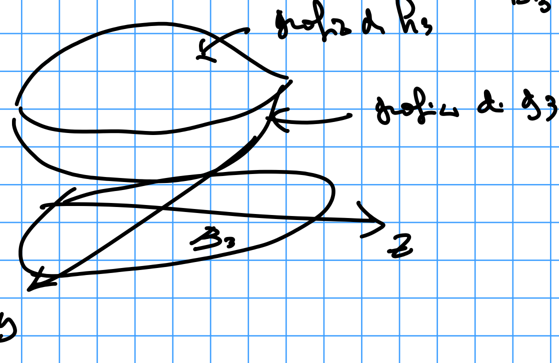
$$\iiint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz \quad \Leftarrow \text{SOMMA DI TRE PEZZI}$$

(1) (2) (3)

$$(1) = \iiint_D \frac{\partial f_1}{\partial x}\, dx\,dy\,dz = \iint_{(y,z)\in B_3} dy\,dz \int_{g_3(y,z)}^{h_3(y,z)} \frac{\partial f_1}{\partial x}\, dx =$$

$$\iint_{B_3} \Big(f_1(h_3(y,z), y, z) - f_1(g_3(y,z), y, z) \Big)\, dy\,dz$$

$$\iint_{B_3} f_1 \vec{\imath}\,(h_3(y,z), y, z) \cdot \vec{\imath}\; dy\,dz + \iint_{B_3} (f_1 \vec{\imath})(g_3(y,z), y, z) \cdot (-\vec{\imath}\,))$$



IL PRIMO DEI DUE PEZZI È L'INTEGRALE (SUPERFICIALE) DEL CAMPO $f_1 \vec{\imath}$ sul grafico di $h_3 = \{(x,y,z) : (y,z) \in B_3 \; x = h_3(y,z)\}$

INFATTI SE CALCOLO QUESTO INTEGRALE CON LA PARAM. CARTESIANA

$\Gamma(u,v) = (h_3(u,v), u, v)$ trovo

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \left(\frac{\partial h_3}{\partial u}, 1, 0\right) \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \left(\frac{\partial h_3}{\partial v}, 0, 1\right)$$

$$\vec{N}_\Gamma = \det \begin{bmatrix} i & D_u h_3 & D_v h_3 \\ j & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\vec{i}}} - \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial u} h_3 + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial v} h_3 =$$

$\vec{N}_\Gamma$ è concorde con $\vec{i}$

se calcolo il flusso ho

CONTA SOLO LA COMPONENTE $\vec{i}$

$$\iint_{B_3} f_1(h_3(u,v), u, v)\,\underline{\underline{\vec{i}}} \cdot \vec{N}_\Gamma(u,v)\,du\,dv =$$

$$\iint_{B_3} f_1(h_3(u,v), u, v)\,du\,dv$$

CON LO STESSO CALCOLO VEDO CHE IL SECONDO PEZZO

è uguale a $\displaystyle\iint_{\text{grafico di } g_3} f_1 \cdot \vec{i} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$

$$\Rightarrow \text{ il PEZZO } ① = \iint_{\partial D} f_1 \vec{i} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$$

ANALOGAMENTE (usando un'altra forma normale)

$$② = \iint_{\partial D} f_2 \vec{j} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$$

$$③ = \iint_{\partial D} f_3 \vec{k} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$$

SOMMANDO OTTENGO

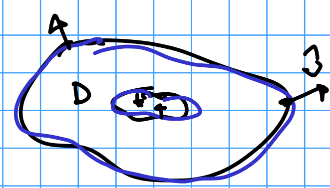
$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{f}\, dx\,dy\,dz = ① + ② + ③ = \iint_{\partial D} (f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}) \hat{\nu}\, d\sigma$$

$$= \iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma \quad \#$$

IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA HA ANCHE UNA VERSIONE BIDIMENSIONALE

TEOR. $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio regolare a tratti LIMITATO

- so che ∂D è descritto da un numero finito di curve chiuse $\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_k$, reg. a tratti



- In ogni $P \in \partial_{reg} D$ esiste $\hat{\nu}(P)$ normale unitario uscente

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto $D \subset \Omega$ e $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ comp. C^1

ALLORA

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{f} \, dx\, dy = \sum \int_{\gamma_i} (\vec{f} \cdot \hat{\nu}) \, ds \qquad \left(=: \int_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, ds \right)$$

(SI POTREBBE RIFARE LA DIM. PRECEDENTE, se D è normale sia rispetto a x che a y)

OSS. La versione unidimensionale sarebbe il T.F.C.I)

ESEMPIO (esercizio di prima rivisto)

$$\vec{f} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$S = \partial D$ $\qquad D = \{ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2 \}$ $\qquad \hat{\nu}$ uscente da D

Avevamo visto che $\displaystyle\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \frac{3}{2}\pi$

LO VOGLIO RIFARE CON IL T. DELLA DIVERGENZA

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f} \, dx\, dy\, dz = \iiint_D 3 \, dx\, dy\, dz =$$

$$3 \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} dx\,dy \int_0^{1-x^2-y^2} dz = 3 \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} (1-x^2-y^2)\,dx\,dy =$$

TORNA

$$3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-\rho^2)\rho\,d\rho = 3\cdot 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = 3\cdot 2\pi\,\frac{1}{4} = \frac{3}{2}\pi$$